分野	力と運動
関連科学分野	大気循環
関連環境問題	オゾンホールの成因、オゾンホールのフロン原因説

ニュートンの運動の法則

古典力学における運動の法則をまとめておきます。

①第一法則

“絶対静止座標系から観測した場合、外部から力を受けない物体は静止し続けるか等速直線運動を続ける。”

この第一法則は決定的に重要です。高校の教科書では「絶対静止座標系から観測した場合」という条件が省略されている場合があるかもしれませんが、この条件を外してはいけません。

②第二法則

“絶対座標系、絶対静止座標系あるいは慣性座標系で観察した物体の運動では、物体に外力が加わる方向に加速度が生じ、加速度の大きさは加わる外力に比例し、物体の質量に反比例する。”

絶対座標系とは一体どのような座標なのか、残念ながら私たちには感知することができません。ニュートンが運動の法則に於いて、物体の運動を記述するため に設定した概念的な座標系です。絶対座標系で表した空間＝絶対空間の任意の座標に固定された座標系は全て絶対静止座標系です。
慣性座標系とは、絶対座標系あるいは絶対静止座標系に対して等速直線運動する座標系です。絶対座標系、絶対静止座標系、慣性座標系においては運動の第二法則＝ニュートンの法則が成り立ちます。

ニュートンの運動の法則は、着目する物体の質量を m、物体の位置を **x**、時間を t、外力を **F** とした場合次式で表すことができます(太字はベクトル量であることを示す。)。

$$\boldsymbol{F} = m \cdot \frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}$$

これをニュートンの運動方程式と呼びます。
絶対座標系で **x** と表される座標値は、**c** を任意の定数として、絶対静止座標系では(**x**＋**c**)、慣性座標系では(**x**＋**c**t)と表すことができます。絶対座標系、絶対静止座標系あるいは慣性座標系の三つ座標系で観測した同一の物体の運動の加速度は、それぞれの座標値を t で 2 階微分することによって求められ、いずれも

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2}=\boldsymbol{\alpha}$$

になります。故に、ニュートンの運動法則は絶対座標系、絶対静止座標系、慣性座標系において同じ形で表すことができるのです。

③第三法則（作用反作用の法則）

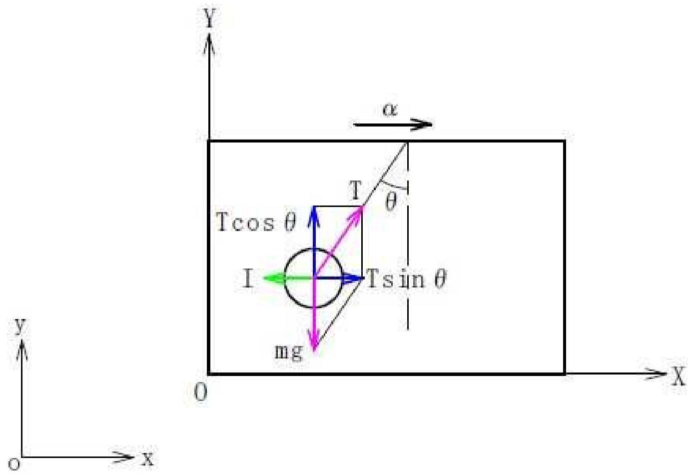
"ある物体が他の物体に対して力を及ぼしているとき、他の物体はある物体に対して大きさが等しく逆方向の力を及ぼしている。"

ニュートンの運動方程式と慣性力

慣性力とは、物体の運動を絶対座標系、絶対静止座標系、慣性座標系以外の座標系で観察することによって、見かけ上働いているように見える仮想の力の総称です。

例1：等加速度運動する座標系における慣性力

次の図に示す等加速度運動する箱に吊るされた質量 m の物体について考えます。物体に外部から実際に加えられている力は、紐の張力 T と重力 mg です。



慣性座標系（x-y）から加速度 α で x 軸方向に等加速度運動する箱に糸で吊るされた質量 m の物体の運動を観測した場合、その x 軸方向、y 軸方向の運動方程式はそれぞれ次のようになります。

$$F_x = T\sin\theta = m\alpha$$

$$F_y = T\cos\theta - mg = 0 \qquad \therefore T=\frac{mg}{\cos\theta}$$

T の値を x 軸方向の運動方程式に代入することで、最終的に次の運動方程式が求められます。

$$F_x = mg\tan\theta = m\alpha \quad \therefore \alpha = \frac{d^2x}{dt^2} = g\tan\theta$$

この物体の運動を加速度 α で等加速度運動する箱に固定された座標（X-Y）から観察すると物体は静止しているので運動方程式は次の通りです。

$$F_X = T\sin\theta - I = 0 \qquad \therefore I = T\sin\theta$$

$$F_Y = T\cos\theta - mg = 0 \qquad \therefore T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

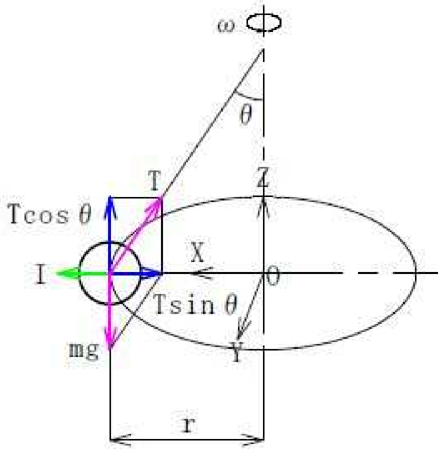
以上から、仮想の力 I は次の式で表されます。

$$I = mg\tan\theta = m\alpha$$

このＩという仮想の力が慣性力です。

例2：円錐振り子

下図に示すように、鉛直方向の軸の周りに角速度ω(rad/sec)で回転する円錐振り子について考えてみます。



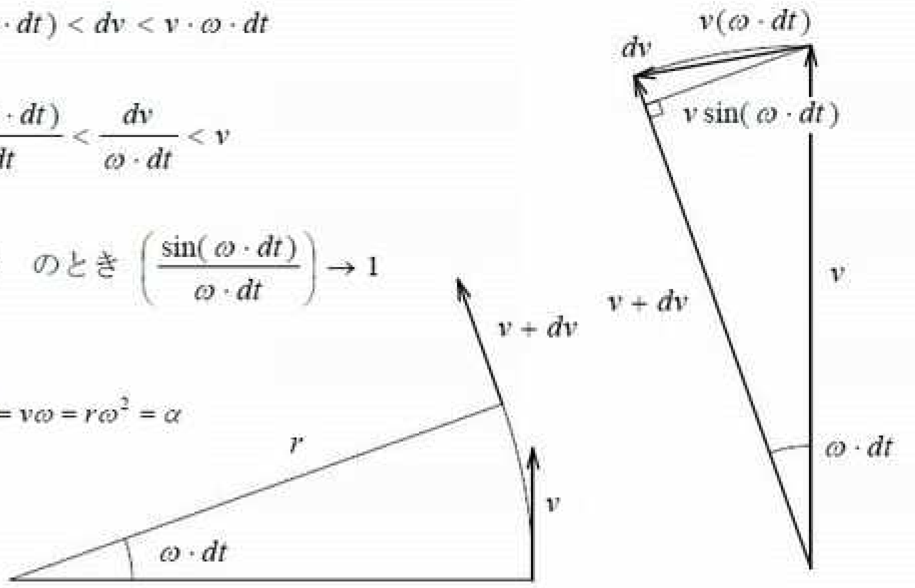
等速円運動についての運動方程式を考えます。下図は慣性座標系において回転軸方向から回転平面内における物体の運動を見た図です。回転円の接線方向の速度は v＝rω です。

$$v\sin(\omega\cdot dt) < dv < v\cdot\omega\cdot dt$$

$$\frac{v\sin(\omega\cdot dt)}{\omega\cdot dt} < \frac{dv}{\omega\cdot dt} < v$$

$$dt \to 0 \quad \text{のとき} \quad \left(\frac{\sin(\omega\cdot dt)}{\omega\cdot dt}\right) \to 1$$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = v\omega = r\omega^2 = \alpha$$



以上から、等速円運動の運動方程式は次の通りです。

$$F = m\alpha = mr\omega^2$$

F は半径 r の等速円運動をする質量 m の物体に対して働く回転円の中心に向かう力で、向心力と呼ばれます。以上から、円錐振り子の運動方程式は次のようになります。

$$F = mg\tan\theta = mr\omega^2 \quad \therefore r\omega^2 = g\tan\theta$$

この運動を、回転軸に直行して物体の重心を通る軸を X 軸、回転軸を Z 軸、X-Z 平面に直行する軸を Y 軸として物体と一緒に角速度 ω で回転する座標系から観察することにします。物体は静止しているので X 方向と Z 方向の運動方程式は次の通りです。

$$F_X = -T\sin\theta + I = 0 \quad \therefore I = T\sin\theta$$

$$F_Z = T\cos\theta - mg = 0 \quad \therefore T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

以上から、

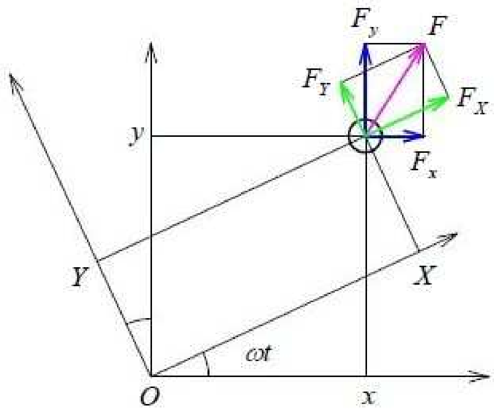
$$I = mg\tan\theta$$

I は等速回転運動における慣性力であり、"遠心力"と呼ばれます。

例3：コリオリの力（転向力）とフーコーの振り子

x-y-z 座標系を慣性座標系として、z 軸（O を通り x-y 平面に垂直な軸）の周りに角速度 ω で回転する平面に固定された角速度 ω で回転する X-Y-X 座標系を用いて外力 F を受ける物体の運動方程式を書きな

おすことを考えます。



x-y-z 座標系を平面と同時に角速度 ω で回転する X-Y-Z 座標系で表すと次の関係があります。

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X\cos\omega t - Y\sin\omega t \\ X\sin\omega t + Y\cos\omega t \\ Z \end{pmatrix}, \qquad \vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_X\cos\omega t - F_Y\sin\omega t \\ F_X\sin\omega t + F_Y\cos\omega t \\ F_Z \end{pmatrix}$$

この関係を用いて運動方程式を X-Y-Z 座標系で表すと最終的に次のようにまとめることができます。

$$\begin{pmatrix} m\dfrac{d^2X}{dt^2} \\ m\dfrac{d^2Y}{dt^2} \\ m\dfrac{d^2Z}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_X + 2m\omega\dfrac{dY}{dt} + mX\omega^2 \\ F_Y - 2m\omega\dfrac{dX}{dt} + mY\omega^2 \\ F_Z \end{pmatrix}$$

右辺の要素の第三項は円錐振り子でも現れた遠心力です。

$$\vec{F_I} = \begin{pmatrix} mX\omega^2 \\ mY\omega^2 \end{pmatrix} = m\omega^2\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = m\omega^2 \cdot \vec{X}$$

遠心力は物体の座標値ベクトルの $m\omega^2$ 倍の値なので、原点＝回転の中心と物体の重心をつなぐ線上に作用します。

右辺の要素の第二項をコリオリ力（転向力）と呼びます。コリオリ力のベクトル表示を次式に示します。

$$\vec{F_C} = \begin{pmatrix} 2m\omega\dfrac{dY}{dt} \\ -2m\omega\dfrac{dX}{dt} \end{pmatrix} = 2m\omega\begin{pmatrix} \dfrac{dY}{dt} \\ -\dfrac{dX}{dt} \end{pmatrix}$$

コリオリ力ベクトルと物体の速度ベクトル

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{dX}{dt} \\ \dfrac{dY}{dt} \end{pmatrix}$$

の内積を計算すると

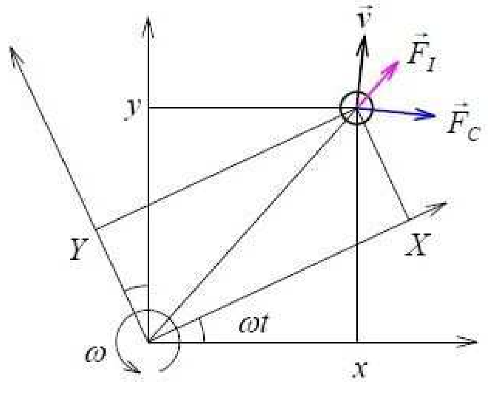
$$\vec{F}_C \cdot \vec{v} = 2m\omega\left(\frac{dY}{dt} \cdot \frac{dX}{dt} - \frac{dX}{dt} \cdot \frac{dY}{dt} \right) = 0$$

また、コリオリ力ベクトルを座標変換行列と速度ベクトルを用いて表すと次のようになります。

$$\vec{F}_C = 2m\omega \begin{pmatrix} \dfrac{dY}{dt} \\ -\dfrac{dX}{dt} \end{pmatrix} = 2m\omega \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{dX}{dt} \\ \dfrac{dY}{dt} \end{pmatrix}$$

$$\cos\theta = 0 \quad , \quad \sin\theta = -1 \quad \therefore \theta = -\frac{\pi}{2}$$

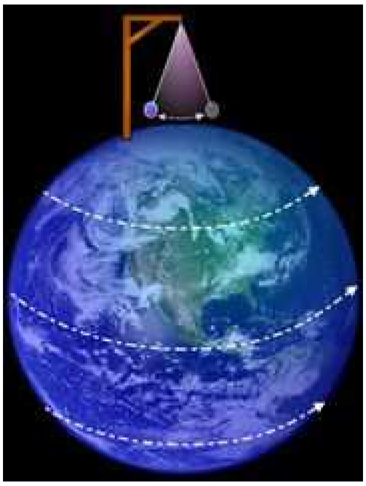
つまり、**コリオリ力の作用方向は物体の運動方向に直交し、速度ベクトルの正方向から右回りに 90°の向きに作用するのです。**



私たちは地軸の周りに ω＝2πrad/24 時間（＝0.000072722rad/sec）で自転する地球に固定された視点から物体の運動を観察してい ます。地球の自転の角速度は小さいため、日常的に観察する運動のスケールでは遠心力やコリオリの力を省略して慣性座標系における運動方程式で現象を近似し てもそれほど大きな誤差は生じません。しかし、あくまでも近似であることは銘記しておくことが必要です。

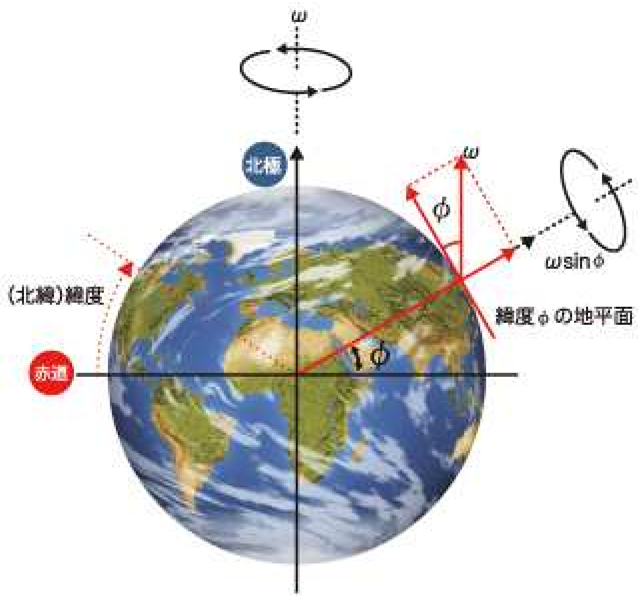
例えば、地球規模の大気の流れや気象現象、海流の運動くらいのスケールになると明らかな影響が出てきます。

遠心力に比べてコリオリの力はイメージしにくい力です。コリオリの力を目に見える形で実験的に示したのがフーコーの振り子です。例えば、下図に示すように北極点で地軸に固定された単振子の運動を観察します。

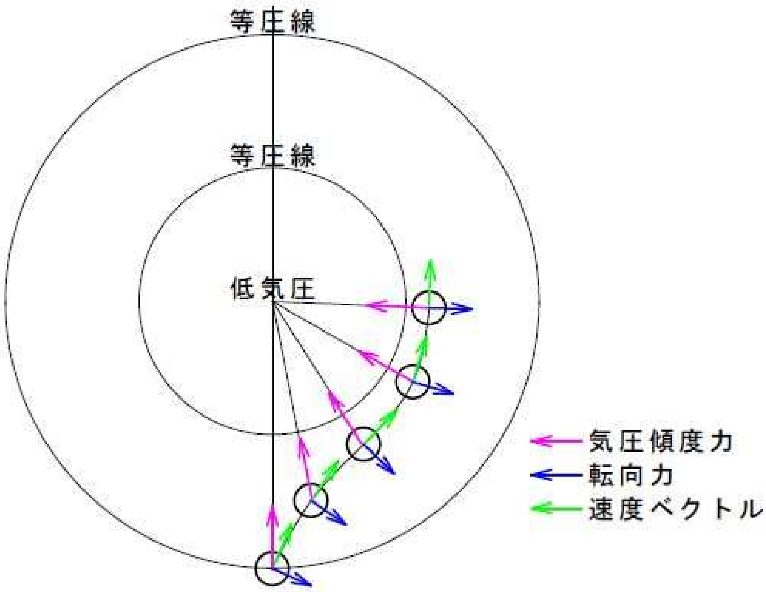


振り子は重力と紐の張力以外の力を受けないものとすれば、振り子の運動面は慣性座標系に対して回転しないはずです。ところが地球は約一日で地軸の周りに 1 回転します。この運動を地球上にいる私たちが観察すれば、振り子があたかも力を受けて地球の自転とは逆方向に1回転したように見えるのです。この仮想の 力がコリオリ力です。

では、極点以外の地軸に対して直行していない地球の表面における角速度はどのようになるのでしょうか？回転速度ベクトルの大きさ ω はどこでも同じです が、これを着目している平面に直行する方向と接する方向に分解して、面に直行する回転ベクトルの大きさ $\omega\sin\varphi$ が着目点の見かけの角速度になります。



つまり、コリオリの力は両極で最大の値となり、赤道上でゼロになります。



上図に北半球の低気圧を巡る気体粒子の運動の模式図を示します。気体粒子はまず気圧の傾きの方向に動き始めます。気圧傾度力は等圧線に直行し、低圧方向 に作用します。気体粒子が動き始めると北半球では緯度に応じたコリオリ力が進行方向に対して直角右向きに作用し始めます。気体粒子は気圧傾度力とコリオリ 力の合力によって加速されながら運動します。その結果、気体粒子は進行方向左側に低気圧、右側に高気圧を見るように等高線に沿うような方向に移動すること になります。その結果、北半球では低気圧は左回り、逆に南半球では右回りになるのです。