

防衛省アセスで採用された流体力学方程式の解説

流体力学方程式とは、水や空気のように空間内に満たされた物資の塊が時間がたてばどこに移動するかを表す微分方程式です。流体力学方程式とは直径が約**数十ミクロン程度**の水塊が時間とともにどこに移動するか（つまり水塊の軌跡）を表現します。例えばプールの片隅の水を染料で染色し、プールの排水口を開けたとき、色付きの水塊は排水溝に向かって移動しながら水塊の中の染料の粒子は周囲に広がっていきます。

➡ プールに貯めた水の中に東西方向(x)と南北方向(y)と鉛直方向(z)に組んだ櫛格子の各点に座標という名前 (x,y,z)を付けましょう(註 1)。各々の格子点同士は東西方向に Δx 、南北方向に Δy 、鉛直方向に Δz だけ離れています。このような櫛格子点にプロペラ式の流速計と水温計と塩分濃度計を取り付け、 Δ 時間おきに計測した東西方向の流速を u 、南北方向の流速を v 、と書くことにします。上で Δ と書いた微小量を δ と書き直すと微分方程式が出来上がります(付録 1 参照)。

すると東西方向の流速 u と南北方向の流速 v の時間発展を表わす微分方程式はそれぞれ

$$\delta u / \delta t + u \delta u / \delta x + v \delta u / \delta y + \nu \delta^2 u / \delta z^2 = -(1/\rho) \delta p / \delta x + F_x \quad (1)$$

$$\delta v / \delta t + u \delta v / \delta x + v \delta v / \delta y + \nu \delta^2 v / \delta z^2 = -(1/\rho) \delta p / \delta y + F_y \quad (2)$$

と書かれます(註 2)。

ところが、鉛直方向の微分方程式は

$$0 = -(1/\rho) \delta p / \delta z \quad (3)$$

で、左辺には鉛直方向の流速が表現されていません。つまり鉛直方向の流速の増加量はゼロです。鉛直方向に静止していた水粒子は時間がたっても静止したままであるという法則です。この式は鉛直方向の運動方程式ではないから、鉛直方向の圧力が釣り合って鉛直方向に水粒子が静かに静止しているという意味を表すために「静水圧近似の式」と名付けられています。

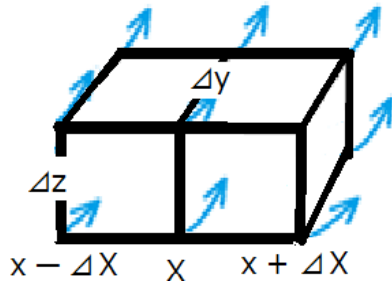
沿岸海洋において鉛直方向には毎秒 1 センチメートルを超えないぐらい流速を持ち、水粒子の運動が 1000 秒程度の時間で元に戻るような、ゆっくりした流れを表すときは上の微分方程式 (1), (2), (3) は適用できます (G. S. CASANADY, *Circulation in the Coastal Ocean*, D. REIDEL PUBLISHING COMPANY, 1982 の 6 ページの上から 8 行目参照)。上の微分方程式 (1), (2), (3) は水粒子の運動の時間尺度 (Time scale) が 1000 秒 (すなわち 16 分程度) とはさざ波や風波を除外していますから、さざ波や風波の立たない静かな日の沿岸の海水の水平移動を表現したいときだけ適用すればいいのです(註 3)。

たとえ採用されている汚染物質の拡散方程式が完璧であったとしても、この拡散方程式が予言する汚染濃度の推定には、上の微分方程式で求めた誤った流速 (u, v, w) を用いているのですから、誤った流速を使った拡散方程式から出た結論もまた誤っています。

環境科学や環境アセスを学ぶときには「ゴミを入れれば、ゴミしかでてこない」という格言の深い意味を理解する必要があります。

註 1 : 流体力学方程式を頭の中に思い描くためには、対象とする海中に格子を櫛のように設置します。数学では格子の各点で東西方向の流速, 南北方向の流速, 観測する時間を漢字で書く代わりに u と v と

tというローマ字で表現します。ハイテク技術を駆使すれば、上下方向の流速を観測することはできますが、一般的な観測で用いるプロペラ式の流速計では鉛直方向の流速は測定できません。下図は海中に設置した櫛格子の格子点は東西方向に Δx ,南北方向に Δy ,上下方向に Δz 離れており、水平方向の流速を青い矢印（ベクトル）で表しています。



註 2: 上の方程式 (1) の形に書かれた法則は何を表現し、何を表現できていないのでしょうか? 上の法則の意味するところは、右辺が分かれば左辺がわかる、すなわち右辺の水圧項と外力項が原因で左辺の流速の増加量が結果を表わす因果律の形式で書かれています。(付録 1 参照)

左辺の第 1 項は格子点に取り付けた流速計に到着した水粒子の加速度 (すなわち流速の時間的増加量) です。(ここで水粒子と言いましたが、正確に言うと 1 立方センチメートルの量(体積)だけの水粒子です。)

左辺の第 2 項と第 3 項は流速の空間的増加量で、くわしく言うと第 2 項は左側の格子点から速度 u で運ばれてくる流速の増加量、第 3 項は南側の格子点から速度 v で運ばれてくる流速の増加量です。

左辺の第 4 項と第 5 項は流体の粘性抵抗のための流速減少量で、流速 u の 2 階微分の値に掛け算している定数の値は海水や大気などの流体を扱った実験で検証されることを覚えておきましょう。(でもこの定数 ν は流体のねばねばした度合、すなわち粘性の度合いですから、流体の種類や流体の環境によって変化する変数になる可能性を我々は排除してはいけません。なぜなら変数係数の 3 微分持つ微分方程式とその厳密解の存在が 1979 年に Grimsha が示してくれているからです。)

右辺第 1 項 F_x は水粒子を左側から右側に移動させる水圧を表します。右辺第 5 項は水粒子に外部からくわえられる力で、応力と万有引力の合計です。地球自転のための見かけの力はコリオリの力とよばれますが、今回はコリオリの力は議論からは外します。)

海面や海底の斜面など水粒子が外部環境と接触するところで水粒子が外部環境から応力を受けます。応力とは (まるで消しゴムを指で捻って変形させるように) 水粒子の表面に沿ってひっぱったり、水粒子を回転させたりする力です。万有引力は地球が水粒子を引っ張る引力 (つまり重力) と月や太陽が水粒子を引っ張る引力で、このために半日潮や全日潮などの潮汐を我々は観測することになります。

また上の微分方程式 (1) と (2) で求めた水平方向の流速 (u, v) を次の方程式

$$\partial u / \partial x + \partial v \partial y + \partial w \partial z = 0 \quad \text{————— (4)}$$

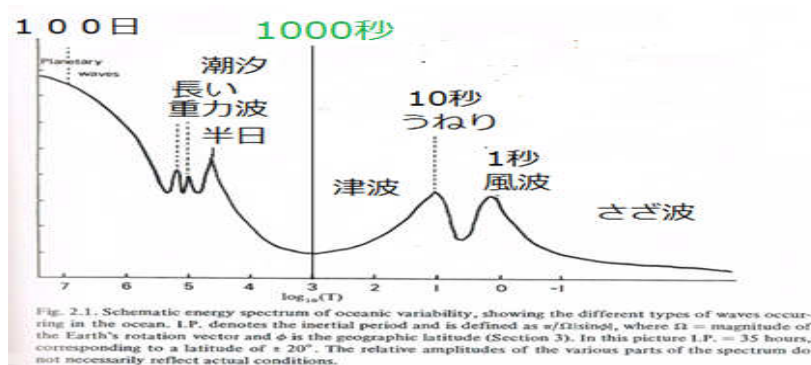
に代入して、鉛直方向の流速 w を導き出すのは、いわば「補正」です。なぜなら、このようにして導かれた w は (1) と (2) と (4) を満足するのであり、鉛直方向の流速の運動方程式ではないからです。

つまり、このような補正 w は数学式の辻褄を合わせるために必要ですが、現実の海水の鉛直方向の流速の測定値と異なるのは当然です。現実の海の水粒子は朝から昼へ、昼から夕方へ、夕方から深夜へ、そして夜明けまで、上空から太陽が燦々と降り注ぎ、また雲が出て雨が降り、沿岸の河川から流れ込む真水で塩分濃度は薄められます。

では上のような微分方程式(1)と(2)と(3)と(4) ではどのような環境のどのような流体の現象が表現できるのでしょうか？海水の鉛直方向の流速は無視していいような場合ならば、上の微分方程式を解けば海中に設置した仮定の櫓格子点に取り付けた全ての測定器が格子点での流速を我々に教えてくれますから、任意の格子点を通じた水粒子や水粒子とともに運動する物体（水難事故で溺れた旅行者や船乗り）の位置を推定する目的なら役に立ちそうです。しかし微分方程式(1)(2)(3)(4) では乱流過程によって海水中を拡散する海洋汚染の現象を調べることはできません。

格子点で測った水圧と外力が格子点で測った流速の時間的増加量と一致しなかったとき、我々は上の因果率が破れたと判定しなければなりません。「細かいことは関係ない〜」ということ言う専門家の癖を加藤周一は著書「私にとっての 21 世紀」で「因果律を法則化した専門家は保守化する」と批判しています。加藤周一は（因果律）法則の適用限界を我々は知るべきだと教えてくれているのです。

註 3： このことを明確に日本語で書かれた沿岸海洋学の本では唯一、宇野木早苗の著書「沿岸の海洋物理学」の 13 ページの第 1 行目にたった数文字で「流れが弱い場合には」と書かれているのを最近発見しました。以下は 1000 秒より早い波の現象を示しています(LeBROND & MYSAK, 1979)



参考文献：

宇野木早苗：沿岸の海洋物理学 東海大学出版会 1995

加藤周一：私にとっての 21 世紀 岩波書店 2,000 年

CASANADY, G.S., Circulation in the Coastal Ocean, D.REIDEL PUBLISHING COMPANY, 1982

Grimhaw, R. Slowly varying solitary waves. I. Korteweg-de-Vries equation,
Proc. R. Soc. Lond. A. 368, 359-375, 1979

LeBROND & MYSAK, Waves in the Ocean, ELSEVIER PUBLISHING, 1979

付録：流体力学方程式の哲学

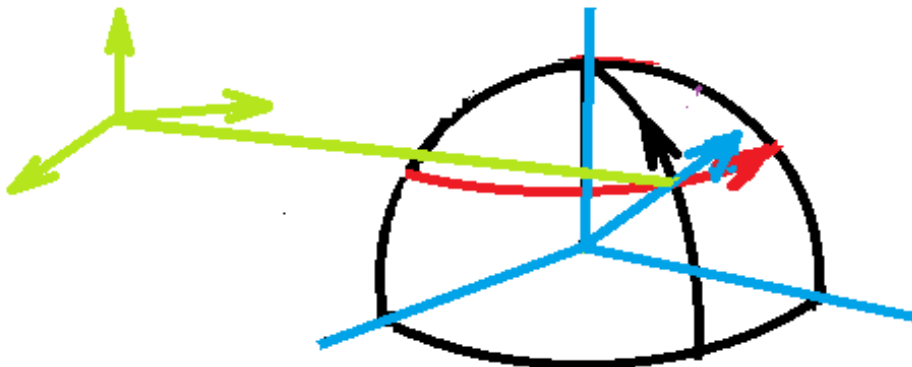
(1) 自転する地球表面にへばりついた流体の方程式

大気や海洋は角速度 Ω で地軸の周りを自転する半径 $R=6000\text{km}$ の地球に張り付いている約 $r=4\text{km}$ の海水や約 $r=10\text{km}$ の空気です。

宇宙の彼方にある絶対静止座標系の原点に座っている神はこれらの海水や大気の運動は海水粒子や空気粒子にニュートン力学を当てはめるのです。なぜならニュートン力学は絶対静止座標の原点から観察した粒子の3次元空間での動きを表わすからです(註1)。

註1：ここでわれわれは神のみが絶対静止の座標を知っていることを忘れてはいけません。

神の絶対座標は北半球の我々と同じく右手系の直交座標です。南半球は左手系の直交座標ですが、南半球の左手座標系は赤道で鏡像変換を行わない限りは、連続な回転操作で北半球に変換できません。地球の中心を原点にした球座標を採用して南半球から北半球への鏡像変換が避けられると誤解している人がありますが、決してそうではありません。このことは後で詳しく議論します。ここでは北半球のわれわれが観察する流体粒子を宇宙の彼方にある絶対静止座標系の原点に座った神が観察すると考えます。



(2) ニュートンは絶対静止座標系の原点に正座する神の座標を使った

さて地球の中心から r だけ離れた地表で、緯度 φ 、経度 λ にある観測点で、われわれは密度 ρ の流体粒子の東西方向の流速を u 、南北方向の流速を v 、上下方向の流速を w 、を観測しているとしましょう(註2)。

註2：数学の表現を簡単にするために、粘り気の少ない(さらさらした)流れで月の引力や風や降雨の影響を受けていない海水の運動を考えます。このように流体の外部から強制を受けない海水の運動方程式はオイラー方程式と呼ばれ、オイラー方程式の解を自由波(Free Waves)といいます。自由とは外部からの強制や抑圧などの制約から逃れているという意味です。

このとき海水の粒子の運動を表すオイラー方程式の東西方向の成分は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} +$$

$$\begin{aligned}
& +\{v/(r \cos\varphi)\}\partial(u \cos\varphi)/\partial\varphi+ \\
& +\{w/r\}\partial(rv)/\partial r + \\
& - 2\Omega v \sin\varphi \\
& +2\Omega w \cos\varphi \\
& +\{1/(\rho r \cos\varphi)\}\partial p/\partial\lambda \\
= & 0 \text{ -----(1.1)}
\end{aligned}$$

第 1 行は単位体積の流体粒子の東西方向の加速度

第 2 行第 3 行第 4 行は単位体積の流体粒子の東西方向速度の移流をおこす力

第 5 行第 6 行は単位体積の流体粒子に働くコリオリ力

第 7 行は単位体積の流体粒子に働く水圧の力です。

オイラー方程式の南北方向の成分は

$$\begin{aligned}
& \partial v/\partial t + \\
& +u/(r \cos\varphi)\partial v/\partial\lambda+ \\
& + \{v/r\}\partial v/\partial\varphi+ \\
& +\{w/r\}\partial(rv)/\partial r + \\
& +2\Omega u \sin\varphi \\
& +\{1/(\rho r)\}\partial p/\partial\varphi \\
= & 0 \text{ -----(1.2)}
\end{aligned}$$

第 1 行は単位体積の流体粒子の南北方向の加速度

第 2 行第 3 行第 4 行は単位体積の流体粒子の東西方向速度の移流をおこす力

第 5 行は単位体積の流体粒子に働く遠心力

第 6 行は単位体積の流体粒子に働くコリオリ力

第 7 行は単位体積の流体粒子に働く水圧の力です。

オイラー方程式の上下方向の成分は

$$\begin{aligned}
& \partial w/\partial t + \\
& +u/(r \cos\varphi)\partial w/\partial\lambda+ \\
& + \{v/r\}\partial w/\partial\varphi+ \\
& + w\partial w/\partial r + \\
& - (u^2+v^2)/r \\
& - 2\Omega \cos\varphi \\
& +\{1/\rho\}\partial p/\partial r \\
= & -g \text{ -----(1.3)}
\end{aligned}$$

と書かれます。

第 1 行は単位体積の流体粒子の上下方向の加速度

第 2 行第 3 行第 4 行は単位体積の流体粒子の上下方向速度の移流をおこす力

第 5 行は単位体積の流体粒子に働く遠心力

第 6 行は単位体積の流体粒子に働くコリオリ力

第 7 行は単位体積の流体粒子に働く水圧の力

右辺は単位体積の流体粒子に働く重力

です。

(3) 静水圧近似を採用した基本方程式とは何だろうか

ここで上下方向の加速度を無視すると

$$\{1/\rho\} \partial p / \partial r = g \quad \text{-----(2.1)}$$

となります。この式を上下方向に積分してみると

$$p(x_0, y_0, z) = \rho(x_0, y_0) g r + p(x_0, y_0, 0) \quad \text{-----(2.2)}$$

とかかれ、水深 z で海水の粒子が受ける水圧 $p(x_0, y_0, z)$ は海面から水深 r までの水柱の質量 $\rho(x_0, y_0) g r$ と等しくなるから、この海水粒子は上下方向に静止することを表わします。この式は静水圧近似式と呼ばれます(註 3)。

註 3 : 沿岸海洋のコンピュータシミュレーションや沿岸の土木工事が環境に及ぼす影響を評価するアセス報告書には静水圧近似式がしばしば採用されていますが、この目的は何でしょうか？ 沿岸海洋や沿岸の海水が上下方向に静止している数学方程式を専門家たちが「物理学の方程式を世界最速のスーパーコンピュータに計算させた結果は未来を予測できる」と言っているのでしょうか？

海水粒子速度を微分方程式で表現するためには海水粒子の速度が微分可能でなければなりません。微分可能ということは途切れなく連続に観測したときに観測値がなめらかに変化しているということです(註 4)。

註 4 : われわれの観測対象の時空変化が微分方程式で表現できる場合であっても、その微分方程式を差分方程式に書き換える場合には新たな問題が生じることがありますが、これは後で議論します。

さて伝統的な沿岸海洋のシミュレーションや環境アセスでは潮汐の運動を表す微分方程式

$$\begin{aligned} & \partial u / \partial t + \\ & + u \partial u / \partial x + \\ & + v \partial u / \partial y + \\ & + w \partial u / \partial z + \\ & - 2\Omega \sin \phi \quad v \\ & + \{1/\rho\} \partial p / \partial x \\ & = \partial / \partial x A_h \partial u / \partial x \\ & + \partial / \partial y A_h \partial u / \partial y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \partial/\partial z \{A_v \partial u/\partial z\} \\
& = \partial/\partial z \{A_v \partial v/\partial z\} \\
& + \{外部から受ける表面力の東西成分\} \\
& \text{-----}(3.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \partial v/\partial t + \\
& + u \partial v/\partial x + \\
& + v \partial v/\partial y + \\
& + w \partial v/\partial z + \\
& - 2\Omega \sin\phi \ u \\
& + \{1/\rho\} \ \partial p/\partial y \\
& = \ \partial/\partial x A_h \partial u/\partial x \\
& + \partial/\partial y A_h \partial u/\partial y \\
& + \partial/\partial z \{A_v \partial u/\partial z\} = \\
& = \partial/\partial z \{A_v \partial v/\partial z\} \\
& + \{外部から受ける表面力の南北成分\} \ \text{-----}(3.2)
\end{aligned}$$

$$\{1/\rho\} \partial p/\partial r = -g \ \text{-----}(3.3)$$

が用いられます。すなわち上下方向には海水は静止していることを表しているのです（註5）。
 註5： 沿岸海洋学（柳哲雄著）の20ページでは上の（3.1）（3.2）（3.3）を沿岸海域の移流＝
 流動を支配する基本方程式と呼んでいます。また防衛省が沖縄県に提出した大浦湾埋め立ての環
 境影響評価アセスの第6章6.9.50では上の（3.1）（3.2）（3.3）を大浦湾埋め立て工事で発生
 する懸濁物質を大浦湾に拡散させる海流を予測するための流動モデルの基本方程式と呼んでい
 ます。

ここでは左辺に注目してください。柳哲雄著沿岸海洋学でも防衛省アセスでも（1.1）の左辺に
 あらわれた $+2\Omega w \cos\phi$ が消えています。これは大浦湾の海水は上下方向の速度 w がゼロだか
 らだと解釈する人がいますが、そう解釈すると辻褄があわなくなります。数理の議論だけしてお
 くと、柳哲雄著沿岸海洋学でも防衛省アセスでも（3.1）【3.2】【3.3】と同時に連続の式と名付
 けた

$$\begin{aligned}
& \partial u/\partial x + \\
& + \partial v/\partial y + \\
& + \partial w/\partial z = 0 \ \text{-----}(3.4)
\end{aligned}$$

を連立させて、鉛直方向の流速を計算して済ませているのです。沖縄高専の応用数学の受講生な
 らば「数学は論理である」という格言を習ったことを記憶しているはずですが、（1. 1）（1.

2) (1. 3) では上下方向の速度はゼロであるのに (3. 4) では上下方向の速度がゼロではないのです。ということは連続の式と名付けられた (3. 4) が何を表現しているかを問わなければならないことを我々に教えてくれているのです。

結論をいしましょう。(1. 1) (1. 2) (1. 3) はさざ波や風波やうねりのような 1000 秒よりも短い時間で変化する海水の運動を表現できないのです (註6)。

註6 : Csanady 著 *Circulation in the Coastal Ocean* には *vertical velocities are at most of order 10^{-2} m/s , time scale at least 10^3 sec* と明記されています。すなわち (3. 1) (3. 2) (3. 3) は海水の上下方向の速度は毎秒数センチメートルよりも小さく、時間尺度は 1000 秒以上のゆっくりした流れを表すのです。

潮汐の流れのように東西南北方向に 1000 秒よりもゆっくりと移動する海水の移動速度だけを知りたいときなら、微分方程式 (3. 1) (3. 2) (3. 3) を使ってもいいのですが、しかし沖から海浜に押し寄せてくる潮汐に流された海水が沿岸海中の 1 点に合流したとき、その点では海水粒子は上下方向のいずれかに抜け出ていきます。そうでなければこの一点では海水の質量が発生し、質量が存在しなかった点で新たな質量が生まれてくるからです。つまり微分方程式 (3. 1) (3. 2) (3. 3) が破産する場合は、(3. 4) がその矛盾を繕うのですが、この数理の難点は空間のあらゆる点で (3. 1) (3. 2) (3. 3) が破産することをはじめから前提にしているということです。論理なんてどうでもいい。「スーパーコンピュータで計算した答えが観測値に合えばいい」という思想は学問の思想ではありません。

(4) なぜ沿岸海洋や環境アセスで長波方程式が使われてきたのだろうか

沿岸海洋や環境アセスで (3. 1) (3. 2) (3. 3) (3. 4) が使われてきました。防衛省の環境アセスを受注した環境アセスの専門家たちもまた、(3. 1) (3. 2) (3. 3) (3. 4) を用いて大浦湾の埋め立て工事で発生する汚濁物質濃度が海水 1 リットル当たり 3mg 以下であると主張しています。なぜ専門家たちは海洋汚染のシミュレーションに静水圧近似を採用するのでしょうか？伝統的な海岸工学や沿岸海洋学の教科書では静水近似を採用した流体力学方程式を長波方程式と名付けてきました。では長波方程式が何を表現し、何が表現していないのでしょうか？

潮汐は海面から海底までの海水粒子全体に及ぼされる引力ですから、体積力とも呼ばれます。海面上を風が吹くと海面上の海水粒子は大気から応力を受けますが、このときの応力は表面力です。(ゾンマーフェルトの名著：変形体の力学では表面力と体積力が区別されています。)