われわれは流体力学方程式と如何につきあうか？

中本正一朗　元地球科学技術総合推進機構主任研究員

1. 序

我々が日常で観測する流体の巨視的現象はしばしば乱流の状態です。ところが、防衛省が行った大浦湾の流れのコンピューターシミュレーションは、海水は上下方向には移動せず、ゆっくり水平方向に流れて、米軍基地建設工事で発生する懸濁汚濁物質を水平方向に移動させる仕掛けがしてありました（註 1）。「油を流したような静かな海面」という言葉を思い出すぐらいの、静かな大浦湾で米軍新基地工事をするのだと日本政府は希望したのでしょうか。しかし、NHK テレビで「勇敢な海猿」と褒められた国土交通省の屈強な官僚は、「そうではないこと」を知っています。沖縄の青少年少女たちは、「出鱈目なインチキが平気で通用すること」を不思議に思っているのかも知れません（註 2）。本講演では日本政府の意図を忖度した環境アセス会社の科学者が行った「大浦湾の流動予測」のインチキと「大浦湾の浮遊物拡散」のインチキの背後に隠れている流体力学の現象論の構造（註 3）を調べ、我々が流体力学をどのように使えば我々が世界を知る（認識する）方法を手に入れられるかを議論します。

2. 流動予測のインチキー　——静かな海中における静水圧近似と、長波方程式という理想化

防衛省が沖縄県に提出した米軍基地建設工事で発生する大浦湾の汚染シミュレーションでは、風波やウネリやさざ波のような 1000 秒以下の時間尺度の波動運動を禁止する流体力学方程式(職業科学者界の業界用語では通称“長波方程式”と呼ばれる）が使われています（Csanady,1980）。長波方程式では海面から海底までどの深さでも、流体粒子に働く重力と流体粒子に働く浮力が釣り合っています。この時は海面から海底まで全ての深さで流体粒子の上下方向の速度はゼロで、この時の水圧は静水圧とよばれます。従って長波方程式は風波やウネリやさざ波のような 1000 秒以下の時間尺度の上下運動は発生させません。日本政府の委託を受けた環境アセス会社の科学者は、長波方程式が生み出す水平方向の流れで浮遊物を水平方向に移動させて、浮遊物の流れる軌跡をコンピュータで描いて見せたのです。長波方程式が産みだす水平方向の流れはゆっくりしすぎて乱流拡散には役立ちません。したがって環境アセス会社の科学者が水平方向の流れで移動させた汚濁物質の濃度は誤っています。計算科学では「ゴミを入れればゴミしかでてこない」という諺を環境アセス会社の科学者は思い出したのかもしれません。本来の自然環境では流体中の浮遊物粒子は 3 次元の移流や分子拡散はもちろんのこと、水平方向の移流効果の上下方向への差による上下方向の混合拡散のほかに、最も重要な拡散が乱流拡散だからです。

3.　汚濁物拡散のインチキ　——浮遊物濃度と浮遊物粒子と分子拡散

日本政府から受託した環境アセス会社の科学者は「米軍基地建設工事中の大浦湾の海水の汚濁防止に努める」ことを目指すと言い「大浦湾内の汚濁物質濃度が水産用水基準 2 ミリリットル/m^3 以内に抑えることができる」と主張します。環境アセス会社の科学者は「汚濁の防止に努める」

「懸濁物質」「SS 濃度」と言う業界用語をあちらこちらで使い乱用します。1900 年のベナールによる対流実験、アンシュタインのブラウン運動の論理、フォッカープランク方程式の論理から、ランジュバン方程式の思想の奥底に流れる、マクロな古典的多体粒子力学の歴史は、これらの数学的普遍が我々の自然認識の論理に左右されてきたことを示します。ここで我々は米軍基地建設工事で発生する「汚濁防止に努める」ために、「我々の認識した現象を表現する方法としての普遍言語（その場だけ人を騙す汚い言語ではない言語）を厳密に定義することから議論を出発します。環境アセス会社の科学者が言う SS とは何か？—浮遊する実体？実体とは物質か？物体か？粒子か？—粒子ならば大きさは？—まさか海水と化学反応した後の分子か？（化学反応するならば 2 種類以上の成分粒子たちの移流と拡散を含む大変に困難な数理科学の難問になるのだ）。ここは、長年の現場経験を重ねた土木技術士の観察を基礎にしなければ、御用学者のインチキの水準にまで堕落するから、我々はこの種の堕落を恐れる。だから我々は「周囲の流体の運動を妨げないが、流体の運動で移動し、拡散する程度の大きさを持つ浮遊粒子集団」にニュートン力学を当て嵌めたフォッカープランクの式の見方に倣って、環境アセス会社の科学者が予言対象にした SS とはマクロな粒子集団であると見做すことから始めます。物理の言葉で表現すると集団（アンサンブル）は統計物理の概念です。統計力学はミクロな力学から出発して、マクロな熱力学の現象論と矛盾しないように作られています。マクロな熱力学の時間不可逆性をミクロ力学の時間可逆性から説明するのが統計力学です。我々は統計力学に倣って、ミクロ力学の時間可逆性とマクロ力学の時間不可逆性を抱えているナビエストークス方程式の仕組みを見ようとするのです。まず1成分の拡散現象を考えます。我々のミクロな観察対象は多数の粒子の軌跡です。我々のマクロな観測対象は 1 次元空間の微少領域（1本の紐の上の微少区域）に存在する粒子数です。多数の粒子を使って実験する、マクロ尺度の微小領域の粒子数とは粒子の存在確率です。これを我々は粒子の濃度と呼びます。こうすると環境アセス会社の言う「SS 濃度」は厳密な普遍的な言語で表現すると、フォッカープランク方程式で表現した濃度です。流体中で浮遊物体とは粒子集団で、粒子集団の中の各々の粒子は時間可逆のニュートン力学に従っているのですが、マクロな観測対象としての粒子集団全体は不規則な外力を受けることになります。ここで浮遊物の濃度を W 、拡散係数を $D^{(2)}(t, x)$、移流係数を $D^{(1)}(t, x)$と書くと、海水の運動で拡散する浮遊物濃度 W は以下フォカープランクの式

$$\partial W/\partial t=\{-\partial D^{(1)}(t, x)/\partial x+\partial^2 D^{(2)}(t, x)/\partial x^2\}W$$

となります（H.Risken,1989）。左辺は濃度の時間変化、右辺の第 1 項は濃度の移動、第 2 項は濃度の拡散を表します。移流速度は$-\partial D^{(1)}(t, x)/\partial x$ です。ここで、移流速度 W に依存する場合は上式は非線形になるので、非線形のナビエストークス方程式と同じ数学構造をもちます（註 4）。大浦湾の環境アセスを構成する 2 つの時間発展式はナビエストークス方程式とフォッカープランクの式です。これら両方とも非線形性と時間不可逆性を抱えています（註 5）。フォッカープランクの式は移流係数も拡散係数も場所 x と時間 t の関数です。ナビエストークス式もフォッカープランクの式も数学構造は

$$\partial Q/\partial t+\alpha Q\{\partial Q/\partial x\}-\{\partial\beta(\partial Q/\partial x)/\partial x\}=0 \text{ または } Q_t+\alpha QQ_x-\{\beta Q_x\}_x=0$$

の形に書かれます。ここでは時間 t と空間 x の微分を下付き変数で書きました。これはバーガース方程式です。バーガース方程式はαとβが定数ですから、非線形系が散逸性と釣り合うような変数変換ホップ変換が存在します。ホップ変換は非線形微分方程式を線形微分方程式に変換する

ので、積分して得られる厳密解は並進する段波の破砕現象や衝撃波を表現します。しかし拡散係数が時間と場所の関数で、浮遊物質が水粒子集団に混ざって、移流する場合はホップ変換では可積分系の微分方程式に変換できません。数学構造自体が強い非線形性を持っているからです（註 5）。ところが拡散係数 β は元々は濃度の流束（フラックス）に性格を表すのですから、濃度が時間空間依存性を帯びることがあります。例えば、段波の端と共に並進する点の流束は、段波の並進速度座標 $\xi = x - ct$ に一致するはずです。すると段波の端とともに並進する点での拡散係数は $\beta(x,t) = \beta_0 \exp(kx-ct)$ と書かれ、上のバーガース方程式は

$$Qt + \alpha QQx - \{\beta_0 \exp(kx-ct)\}x\}\{Qx\} - \{\beta_0 \exp(kx-ct)Qx\}x = Qt + \alpha QQx - \{\beta_0 \exp(kx-ct)\}Qx - \{\beta_0 \exp(kx-ct)\}Qxx = 0$$

とかかれます。移流項の強さを示すパラメータは定数 α_0 にできますから、上の微分方程式は可積分で、厳密解

$$Q=(2c/\alpha_0) / [1+(c/\beta_0)\exp(kx-\omega t)]$$

が存在するのです。

4. 我々は流体力学と如何に付き合うか？ ——教訓：数学言語の普遍構造と物理認識の様式に見落としはなかったか？

　線形の現象論的パラメータを持つ現象論的微分方程式の数学構造自体は非可積分でも、物理（ものごとの論理）が現象論を非線形にする可能性があります。本来の物理現象論は可積分系の微分方程式という数学構造を持つことがあるのです。ご都合主義で安易な現象パラメータを使うことを拒否して、観測可能なマクロ現象と数学言語の構造を見直すことにより、我々は流体力学を信頼できる現象論として使う保証を手にいれることができるかもしれません（註 6）。

註 1：

　大浦湾アセスでは大浦湾の海水の粒子に働く圧力は $p = \rho gh$ とされています。ここで海は ρ は粒子の密度、g は重力加速度、h は海水粒子から海面までの高さです。上式は海で中でも大気中でも静水圧(Hydrostatic)の近似式とよばれています。こうすると大浦湾内の海水は上下方向に力がつり合い、海水は上下方向には運動しないことになります。この海水は自分自身が従うべき運動方程式では上下方向の移動を禁止されていますから、自発的に上下運動はしませんが、他所から水平運動で流入してくる海水があるために、強制的に上下に移動させられることがあります。このような上下運動は運動量保存則と質量保存則が長波近似の体制内で矛盾を引き起こすという例です。長波近似は近似たる所以ですから、現実世界では長波近似が破れる場合が避けられないのです。なぜなら、長波方程式では海水粒子の上下方向の移動距離をゼロで、上下方向の流速もゼロです。長波方程式で上下方向の流速がゼロだと法律で決められているのに、水平方向（すなわち前後左右）からあなたのいる 3 次元の世界に海流が流れこんできたら、あなたは質量保存則　$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0$　という法律をおもいだします。 ここで x は東向き、y は北向き、z は上空を向いています。u は東向き流速,v は北向き流速,w は上向きの流速です。上式の右辺のゼロがあなたの質量を保存することを保証しています。上式はあなただけに当て嵌まるのではなく、あなたの隣人も、そのまた隣人にも、全ての 3 次元空間の人が「水平方向から流入してきた質量 $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y$ と同量の $\partial w/\partial z$ を上下方向に流出」させる法律だったのです。

註 2:

理想化された微分方程式の厳密解は容易に求められることがあります。理想化された微分方程式の厳密解と矛盾しないい（整合する）「おもちゃの海モデル（模型）」の流速をコンピュータ・グラフィックスで描いた絵は政治家たちを説得する（政治家を騙す）ために使われます。その絵には長波方程式で計算された水平方向の流速が書かれていますが、上下方向の流速がゼロであるという似非法律を密かに使ったことは隠されているのです。正義の検事ならば、「理想化された長波方程式の厳密解が現実の現象を表現できるかどうか」という物理（物事の論理）を思い出すのです。

註 3:

大気や海洋の流体の運動は以下の連立方程式で表されます。海水の質量保存則は

$$\partial u/\partial x+\partial v/\partial y+\partial w/\partial z=0$$

海水の運動量保存則は

$$\partial u/\partial t=\{-(u\partial/\partial x+v\partial/\partial y+w\partial/\partial z)u+\nu\,\partial^2u/\partial x^2\}u-(1/\rho)\partial p/\partial x-\alpha g\theta$$

海水の熱エネルギー保存則は

$$\partial\theta/\partial t=\{-(u\partial/\partial x+v\partial/\partial y+w\partial/\partial z)\ \theta+\partial^2\theta/\partial x^2\}$$

です。ν は粘性、ρ は密度、p は圧力、α は熱膨張率、θ は流体粒子の温度、海水の速度ベクトルは ui+vj+wk で、静水圧近似を行うと上下方向の流速がゼロ w=0 です。

註 4:

ニュートン力学は時間可逆です。ナビエストークスの式と呼ばれている上の流体力学方程式は流体の動粘性係数 ν が定数なら、時間反転で符号が変化しません。したがってナビエストクス式も拡散方程式も時間不可逆の非線形微分方程式です。

ここで時間不可逆性と非線形性をもつ微分方程式を

$$\partial u/\partial t=\{-\alpha\ u\partial u/\partial x+(\partial\beta/\partial x)(\partial u/\partial x)+\beta\,\partial^2u/\partial x^2\}$$

と書くことにします。非線形微分方程式でも特殊な場合は、変数変換によって線形微分方程式の形に書き直せる場合があります。このような非線形微分方程式は数学の眼鏡では可積分系とよばれますが、物理の眼鏡で見ると非線形性が散逸性と釣り合うという意味で、非線形性が散逸性で打ち消されると言うことです。ソリトン方程式を積分する計算式を書いてみると、非線形項の積分と全く同じ形の項が散逸項の積分から現れることがわかります。しかし微分方程式で 2 つのパラメータ α と β が時空の関数である場合の厳密解は一般には存在しません。自然界には変数変換では線形に変換できない本質的な非線形系が存在するのです。と言うことは、流体中で浮遊する物体（すなわち粒子集団）の拡散現象を表す微分方程式は

❶時間可逆系と時間不可逆系の対立、

❷非線形力学と散逸力学の対立

という 2 つの困難が本質的だということです。しかし、これら 2 つの困難は元々の根っこは同じモノを我々が物理の眼鏡（で見た認識）と数学の眼鏡で見た認識）の違いであるだけのことかもしれません。でも「そうである。もともと同じなんだ」と我々が自ら確信するためには、これら 2 つの困難が現れた流体力学の現象論をなぜ信じるか、なぜ流体力学はうまくいくのか？を議論したくなります。「流体力学は信用できる現象論になっているか？」と問いたいのです。言い換えると「信頼できる現象論は如何にして得られるか？」を我々は問うのです。

註 5:

流体力学は 3 つの保存則を使います。流体の質量保存則、運動量保存則、エネルギー θ 保存則です。流体運動に現れる非線形性は運動慮保存則の中の貫性項$(u\partial/\partial x+v\partial/\partial y+w\partial/\partial z)u$，とエネルギー保存保存則の中の$-(u\partial/\partial x+v\partial/\partial y+w\partial/\partial z)\theta$ です。ここで θ は温度です。運動量保存則の 2 つのパラメータ ν と ρ は定数のように見えますが、密度 ρ は温度 $\theta(t,x)$に依存します。温度 θ を決める熱拡散方程式は流速ベクトル $u(t,x)$の式に依存します。その運動量保存則は、粘性 ν に対して敏感ですから、我々が観測データで求めた粘性パラメータには微少な誤差は不可避です。しかも我々は真の値をしらないのだから、我々が観測から得た値の誤差がいくらかを我々は知ることができません。

流体中に浮遊する物体は粒子の集団の拡がり方も上の散逸型の微分方程式されます。なぜなら、粒子集団の中の各々の粒子はニュートン力学に従っていても、粒子集団全体には不規則な外力を受けることになるからです。ここで浮遊物の濃度を W 、拡散係数を $D^{(2)}(t, x)$、移動係数を $D^{(1)}(t, x)$と書き、空間微分を太字で表すと、海水の運動で拡散する浮遊物濃度 W は以下フォカープランクの式

$$\partial W/\partial t=\{-\partial D^{(1)}(t, x)/\partial x+\partial^2 D^{(2)}(t, x)/\partial x^2\}W$$

で表現できます（H.Risken,1989）。ここでは拡散係数も移動係数も場所 x と時間 t の関数ですから、この微分方程式は一般に可積分系ではありません。しかし移動係数 $D^{(1)}$は αu ,拡散係数 $D^{(2)}$は定数の場合、上式は

$$\partial W/\partial t=\{-\alpha\,\partial/\partial x+\beta\,\partial^2/\partial x^2\}W$$

と書かれます。大きな尺度の浮遊物体は量子力学の小さな尺度で熱運動する水粒子の不規則な運動で揺さぶられることを表す確率微分方程式です。これはブラウン運動を「顕微鏡で見た花粉粒子の周りを取り囲む多数の小さい分子が不規則に花粉粒子に衝突するが原因で、花粉粒子は不規則な軌跡を描く」とするアインシュタインの実体モデルを数学言語で表現しています。上式の厳密解はガウス型の分布になり

$$W(x, t)=[1/(4\Pi\beta t)^{0.5}]\exp[x^2/(4\beta t)]$$

と書かれます。

大気や海洋の環境シミュレーションで愛用される流体力学はニュートン力学系の方程式に、上術した散逸型の微分項を持つ熱力学方程式が付きまといます。しかし現実に観測された拡散物質の濃度は上のガウス型の濃度分布から外れる場合がほとんどです。ということは現実の大気や海洋の流体シミュレーションではフォッカープランク型の確率過程の方がナビエストークス方程式と相性が良いのかもしれません。いや、それどころか、以下の積み残した問題

❶ナビエストークス方程式を一般にミクロな力学から厳密に導くことが正当化されていないこと（Yau,1998）,

❷ナビエストークス方程式の解の一意存在がいまだにはっきりしないこと（Ladyzhenskaya,2000;小薗、2003）,

❸ナビエストークス方程式の粘性項にどんな小さな摂動を掛けても大きく性格が変わること（ラジゼンスカヤ、1979）、

❹非線形の流体方程式が一般に可積分系に書き直せる証明が存在しないこと（Grimshaw;1967；Nakamoto,2018）

❺拡散過程を含む 2 つの系が相互作用する場合、2 つの方程式の内で時間空間尺度の大きい系のエントロピーが減少すること（Skinner and Swinney,1991；Quyang and Swinney,1991）

が残っている限りは、我々はナビエストークス方程式を第一原理とするのではなく、現象論として磨き上げるべきなのかもしれません。因果律は現在から過去を説明できますが、現在から未来を予言できません（柳瀬睦男、2006）

註 6：

乱流の理論が未完成のままになっている数学的な理由は流体力学方程式に埋め込まれる乱流成分の高次の相関関数（高次のモーメント）の非完結性のためです。乱流の非完結性とは粒子速度の自己相関がゼロということです。例えていうと、流体粒子の乱流成分は記憶を持たないと言っていいのです。ボルツマンも希薄気体の粒子集団同士が衝突に際して過去の記憶を忘れるとして、分取集団の分布関数の完結性（3 体粒子の分布関数が 2 体粒子の分布関数で表現できること.）を仮定して、粒子集団の速度分布がガウス型の分布することを示しました。流体力学の乱流成分の完結性が観測によって破られていることは、ボルツマンの仮定した希薄気体の分子集団の速度分布関数の非完結性が言い当てているのかもしれません。

参考文献：

Casanady: Coastal Ocean Currents,1980,
H.Risken: The Fokker-Plank Equation, Springer,
Quyang and Swinney:Transition from uniform state to hexagonal and striped Turing patterns, Nature, 352,610-612,1991
Skinner and Swinney:Peridic to quasi-periodic Transition of chemical spiral rotation. Physica(D) 48, 1-16,1991
Yau: Asymptotic solutions to dynamics of many-body problems and classical continuum equations,International Press,1998. ラジゼンスカヤ:非圧縮性流体の数学的理論、産業図書,1979
柳瀬睦男：存在的真理——偶然と必然を巡って、数理科学、2006 年