

時間追跡による気候予測は不可能

HP 管理者 近藤 邦明

1. はじめに

現在の気候予測シミュレーションは、そのモデル自体に数多くの誤りやごまかしが存在するため、意味のある解を得ることは不可能です。しかし、仮にモデルが正しかったとしても、数値的なシミュレーションには多くの問題が存在し、気候現象のようなマイクロからマクロに至る様々な階層性を含む巨大な問題では、将来的にも時間追跡という形で将来予測を行うことは不可能であり、この種の問題は数値シミュレーションにはなじまない問題であることを、主に解像度という視点から示してみようと思います。

2. 解像度の変化で現象がどのように認識されるのか？

簡単な周期関数として \sin 関数を取り上げることにします。

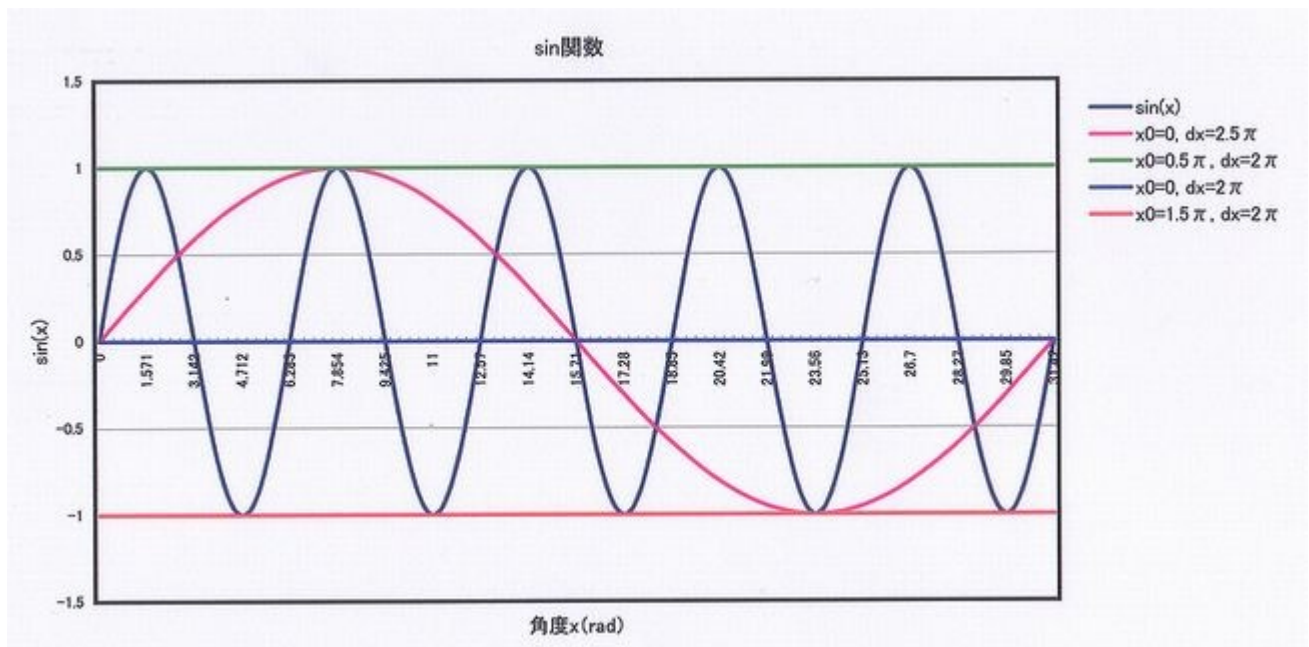


図1 サンプリング間隔による関数認識の変化

図1の紺色の曲線が観測しようとする関数、ここでは $\sin(x)$ です。御存知のように、 \sin 関数は、周期 2π (約 6.28) rad、振幅は ± 1 の周期関数です。

さて、我々は観測する関数が \sin 関数だとは知りません。分かっているのはある定点 x_0 における関数値と、そこからサンプリング間隔 dx の地点における関数値だとします。

まず、定点 $x_0=0$ 、サンプリング間隔を $dx=2.5\pi$ で \sin 関数を観測した場合、観測値を滑らかな曲線で結ぶと桃色で示した曲線を得ます。これは、周期 10π の \sin 関数、 $\sin(x/5)$ になってしまいました。

次に、定点 $x_0=0.5\pi$ 、サンプリング間隔を $dx=2.0\pi$ で \sin 関数を観測した場合、観測値を滑らかな曲線で結ぶと緑色で示した曲線を得ます。これは、関数値 1.0 の定数関数になってしまいました。

同様に、定点 $x_0=0$ 、サンプリング間隔を $dx=2.0\pi$ で \sin 関数を観測した場合、観測値を滑らかな曲線で結ぶと青色で示した曲線を得ます。これは、関数値 0.0 の定数関数になります。

更に、定点 $x_0=1.5\pi$ 、サンプリング間隔を $dx=2.0\pi$ で \sin 関数を観測した場合、観測値を滑らかな曲線で結ぶと赤色で示した曲線を得ます。これは、関数値 -1.0 の定数関数になります。

ここでは、極端な例として元の関数の周期の倍数をサンプリング間隔としたため、特殊な状況になっています。しかし、少なくとも観測しようとする関数の特徴的な周期、 \sin 関数では 2π ですが、それよりも十分小さなサンプリング間隔＝解像度の観測データがなければ、観測しようとする関数を十分認識し得ないということなのです。

離散的な観測データによる自然現象の把握とは、直感的に全体像を把握することのできない時空的な広がりを持つ巨大な問題についての部分的なデータで、その全体像を説明しようとすることです。

実際の自然現象、例えば気象に関するデータは、時空的に激しく変動する非定常な不規則変動関数だと考えられます。しかも例題のように、観測しようとする関数形が分かっているわけではないのです。妥当なサンプリング間隔は自明ではなく、時空的なサンプリング間隔を徐々に小さくしていき、サンプリング間隔による観測値の変動がなくなるように試行錯誤することで見つけなくてはならないのです。

さて、もう少し思考実験を続けましょう。これまでの例では、観測点において関数値そのものが観測できるものとししました。今度は、定点 x_0 においては関数値とその変化率が観測され、その他の観測点では変化率だけが観測できるものとしします。元の関数を復元するために、線形近似を用いることにします。つまり、Taylor 展開の第 2 項までを用いて、次式で近似します。

$$F(x) \cong F(a) + \frac{dF(a)}{dx} dx$$

ここで、関数 $F(x)=\sin(x)$ 、 $dF(x)/dx=\cos(x)$ 、定点 a の初期値を x_0 、サンプリング間隔を dx と考えます。定点 x_0 の観測値から、観測点 1 の $F(x)$ の近似値 $F(x_1)$ を次のように推定します。

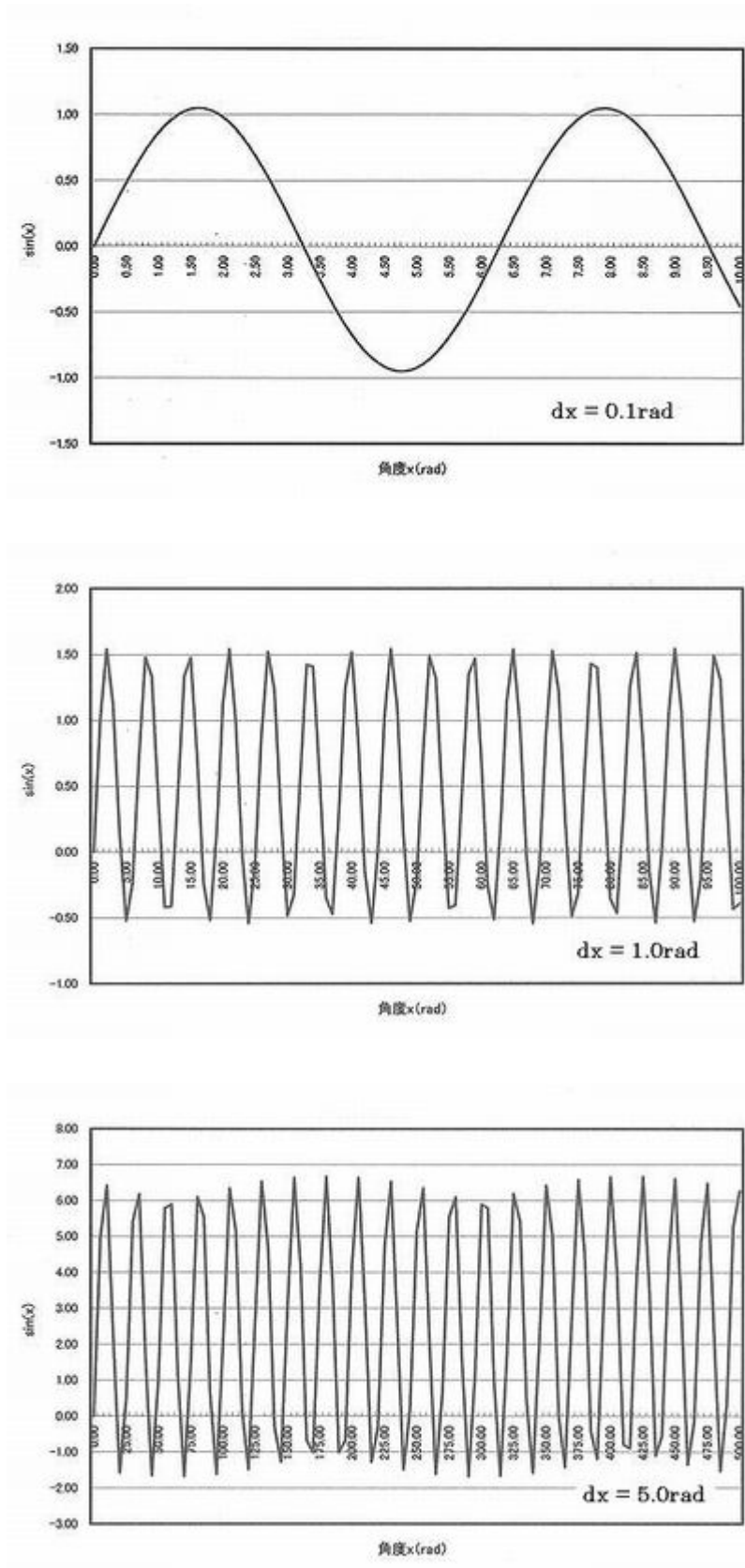
$$F(x_1) = F(x_0) + \cos(x_0) \times dx$$

以下同様に、

$$F(x_2) = F(x_1) + \cos(x_1) \times dx$$

...

図 2 に、定点 $x_0 = 0.0$ 、サンプリング間隔 dx を 0.1rad 、 1.0rad 、 5.0rad 、 6.0rad 、 2π (≈ 6.28) rad に変化させた場合を示します。



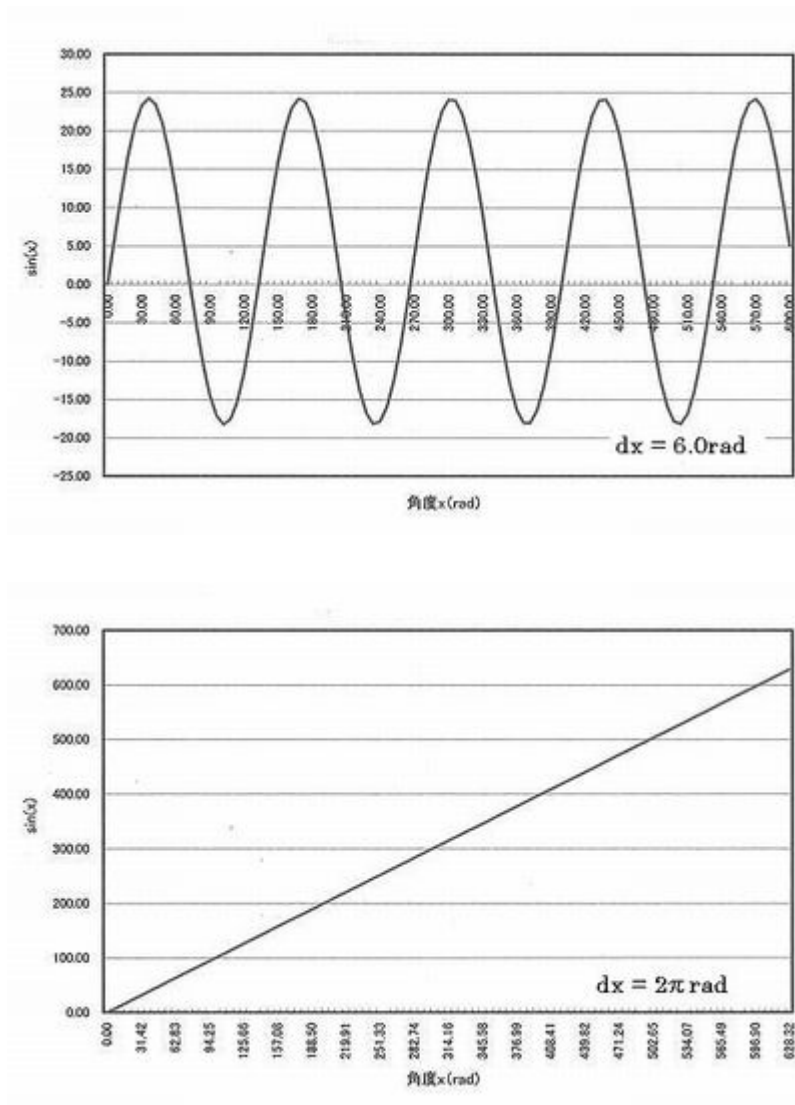


図2 線形近似による sin 関数の変化

図2から明らかなように、サンプリング間隔の変化によって、推定値は大きく変化します。0.1rad程度であれば、まずまずの値と考えて良さそうです。

1radですと、 2π の周期性は再現しているものの、誤差は50%を超えます。さらに間隔を広げていくと、最早 2π の周期性も再現できなくなります。特に、元の関数の周期である 2π に近づくと、劇的な変化を見せます。サンプリング間隔がちょうどsin関数の周期 2π に同期すると、直線になってしまいます。

対象とする関数の関数値そのものが観測できる場合には、サンプリング間隔が変化することで、曲線の形状は大きく異なるとはいえ、その値は関数値の最大・最小値の範囲に収まります。しかし、変化率という情報から関数値を推定しなければならないような場合にはとんでもなく大きな誤差が生じる可能性があることを銘記しておかなくてはなりません。

しかし、「実際にはそんな馬鹿な解釈はしないだろう」と思われるかもしれません。しかし、それは今回の例のように単純な1変数の関数で、みなさん御存知の関数であったという先入観があるからです。実際の自然現象では、自由度=パラメータ数は無数に存在して

いるのです。事はそれほど単純ではないのです。

例えば、Keeling 曲線について、産総研の阿部氏は次のような認識を述べています。

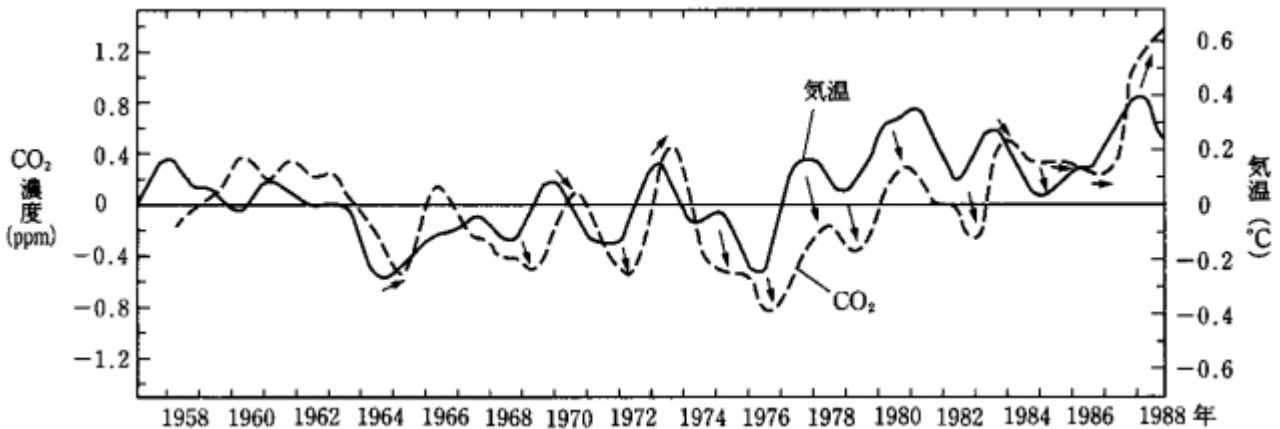


図3 Keeling 曲線

『・・・しかし、それを認めたとしても、図1（Keeling 曲線）で0.5度の気温変化に対応するCO₂濃度変化がわずか1ppmであることからすれば、過去45年間で増加した64ppmを気温上昇で説明することは、この間に気温が32度上昇していない以上、不可能である。』

Keeling 曲線では、 $\pm 0.5^{\circ}\text{C}$ 、 $\pm 1\text{ppm}$ というオーダーの情報を示しているにすぎませんが、ここで得られる $2\text{ppm}/^{\circ}\text{C}$ という比例定数（変化率と考えてよいでしょう。）を基に、64ppm という大きな変動を伴う現象に対して単純に当てはめて論じる阿部氏の議論は、余りにも無謀と言わなければなりません。

観測値の離散的なデータの解像度と対象とする自然現象のスケールの間には密接な関係が存在します。対象とする現象に対して私たちが必要とするスケールにたいして、解像度による影響がなくなるまで時空間的なサンプリング間隔を細分化しなければ正しい認識は得られないことを銘記しなくてはなりません。

高解像度の観測データに対して統計的な処理をすることによって、現象の変動傾向をある程度平滑化して大きな傾向を把握することと、はじめから低解像度の観測データで現象を解釈するのはまったく意味が違うのだということを理解しなければなりません。

3. モデルの離散的な表現

何らかの現象（ここでは自然現象にこだわらないことにします。）を数値的に模倣することを数値シミュレーションと言います。数値シミュレーションを行うためには、対象となる問題の入力と出力の間にある関係を何らかの構成法則、つまり関数関係として表現することが必要になります。

我々が数値シミュレーションを行うための道具であるコンピューターの扱うことのできるデータ数には限りがあるため、無限の自由度を持つ問題を有限個のパラメータで表現することが必要になります。

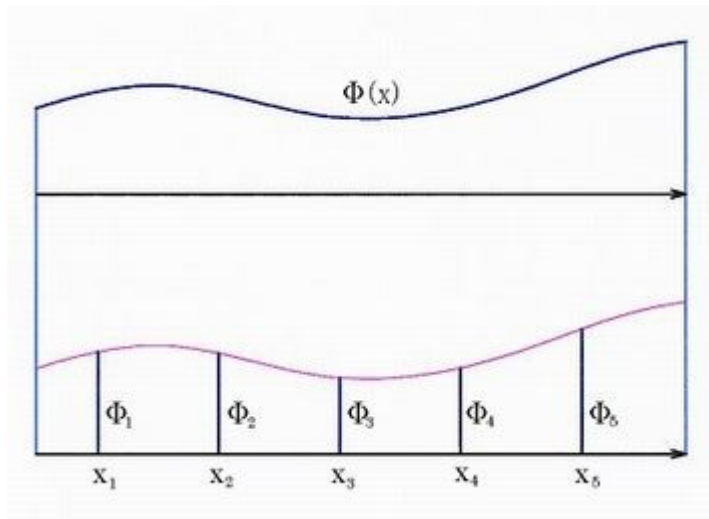


図4 関数値の離散的な表現

最も簡単な例として、変数 x で表される1次元の領域について考えます。実際には x という連続量に対して定義された連続関数 $\Phi(x)$ を領域内の離散的な点 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ という有限個の点についての関数値 $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \dots$ で表すことにします。これら $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ のことを格子点と呼ぶことにします。

ここで重要なのは、区間内の関数値の分布は「滑らか」に変化することが必要だということです。これは微分可能と言い換えても良いでしょう。区間内で激しい変動を示す場合には、誤差が非常に大きくなり、意味のある近似値を得ることができないからです。

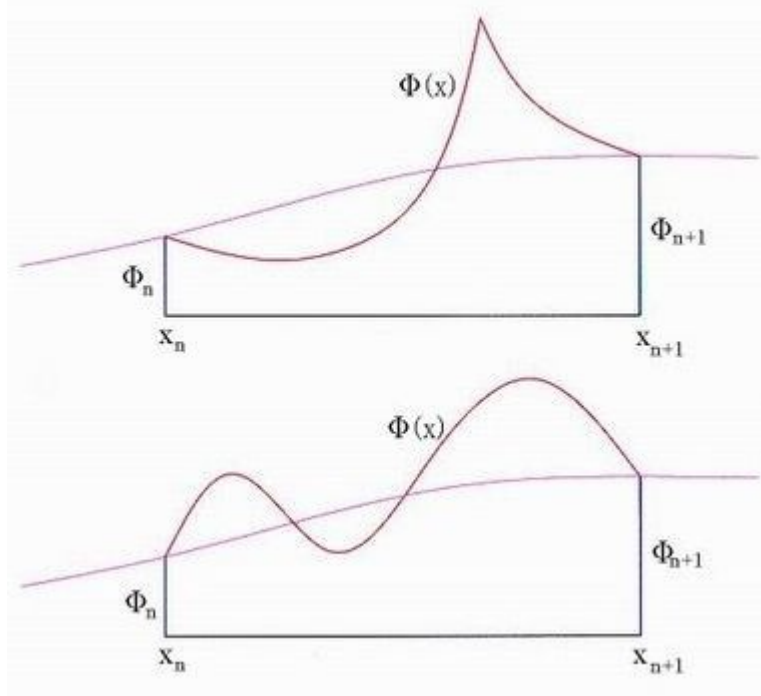


図5 区間内の関数の形状による誤差の発生

仮に、区間内に特異点＝微分値が有限・確定できない点がある場合には、大きな誤差を生むこととなります。図5上に示したように、区間内に曲線が折れ曲がった点がある場合や、曲線の勾配が $\pm\infty$ になる場合などがあります。格子点における関数値 $\dots, \Phi_n, \Phi_{n+1}, \dots$ で表現できる滑らかな曲線を桃色、実際の関数を赤の曲線とすると、大きな誤差が生じることが予測されます。

また、特異点がなくとも、区間内で激しく変動する関数（図5下）は一般的に誤差発生の原因となります。sin 関数の例からも予想できることですが、対象とする関数の特徴的な発現スケールよりも十分小さな間隔で離散化しなければ誤差は非常に大きくなります。この場合は、格子点間隔を更に細かくすることで大きな誤差の発生を少なくすることができます。

以上から、モデル化において、もちろん最も重要なのは対象とする現象を正しく表現した構成法則を導くことですが、その上で離散的な数値化という手法を用いることから、現象を表現するのに十分な解像度が必要なのです。また、特異点の近傍では何らかの特殊な手段を用いてこれを取り除いてやる必要があります。

以上の問題点をクリアーした上で、最終的に離散化された格子点におけるパラメータを用いて、連立方程式を組み立て、その解を求めることでシミュレーションは実行されます。

少し抽象的な話が続きましたので、具体的に簡単な問題について考えてみることにします。私は構造屋なので、馴染み深い構造力学の問題を扱うことにします。ここでは『単純梁』を取り上げることにします。梁とは曲げを受ける棒だと思ってください。

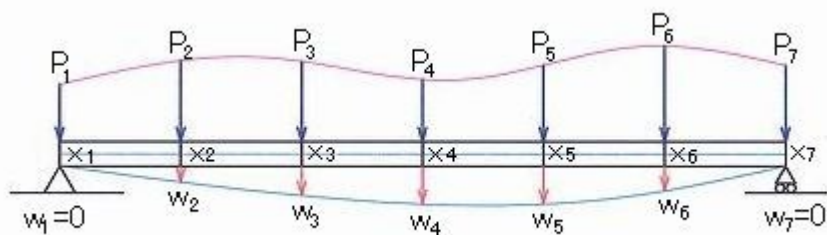


図6 単純梁の離散的表現

単純梁とは、水平に置いた棒状の物を、両端点、ここでは格子点 x_1 と x_7 で支えたものです。 x_1 では鉛直方向と水平方向の移動ができないようにし、 x_7 では鉛直方向の移動ができないようにします。

さて、この単純梁に力を作用させます。梁を曲げようとする力 $P(x)$ のことを横荷重と言います。横荷重を受けた単純梁は曲げられて下向きにたわむこととなります。たわみを $w(x)$ と表すことにします。

力を受けた梁には曲げモーメントという力が生じます。曲げモーメント M は座標値 x と

横荷重 $P(x)$ の関数として表されます。また、曲げモーメント M とたわみ w の間の関係は、2階の常微分方程式で次のように関係付けられます。

$$M = -w''IE \quad (\text{「}''\text{」は } x \text{ による 2 階の微分係数であることを示すとします。})$$

IE は曲げ剛性と呼ばれる定数で、棒の曲がり易さを表す定数です。

横荷重 $P(x)$ 、たわみ $w(x)$ をそれぞれ格子点の関数値 $P_1 \cdots$ と $w_1 \cdots$ を用いて表してやり、これを使って梁の微分方程式によって関係付けてやればよいのです。最終的には、 $P_1 \cdots$ と $w_1 \cdots$ に関する連立一次方程式を得ることが出来ます。

$$k_{11} \times w_1 + k_{12} \times w_2 + \cdots + k_{17} \times w_7 = P_1$$

$$k_{21} \times w_1 + k_{22} \times w_2 + \cdots + k_{27} \times w_7 = P_2$$

...

$$k_{71} \times w_1 + k_{72} \times w_2 + \cdots + k_{77} \times w_7 = P_7$$

ここに、 $k_{11} \cdots$ は定数係数です。

実際には離散化の手法は様々です。最も単純で直感的に分かり易いのは差分法と呼ばれる手法です。構造分野では有限要素法という手法が多く用いられます。興味のある方は調べてみてください。

通常、係数行列を $[K]$ 、格子点のたわみを要素とするベクトルを w 、格子点の横荷重を要素とするベクトルを P として、次のように書き表します。

$$[K]w = P$$

この連立一次方程式を、 $w_1 = w_7 = 0$ という条件の下に解くことによって、単純梁の格子点のたわみを求めることができます。

以上、1次元の領域を対象とする問題を例に、数値シミュレーションの定式化の流れを見てきました。気象現象のような3次元空間の問題では、領域を表すために3つの座標が必要になります。非定常問題では更に時間軸を含めた4次元空間における離散化が必要になります。

離散化の流れそのものは変わりませんが、多次元空間における構成法則の定式化はかなり複雑なものになります。モデル化において完全に整合性の成立する場合ばかりではなく、場合によってはある程度矛盾を含む定式化が必要な場合もあるのです。

4. 線形系

単純梁の横荷重に対する曲げ問題は、最終的には連立一次方程式の解を求める問題に帰着しました。この問題は厳密には直線梁の線形弾性・微小変形・曲げ問題という分類になります。この問題では、横荷重という入力を受けた単純梁のたわみという出力あるいは応答が、格子点の値の一次式として関係付けられたわけです。

一般的に、入力と出力の関係を一関数として表せるような場合、その系、ここでは単純梁を線形系と呼びます。単純梁を例に、線形系の特徴を見ておくことにします。

例えば、単純梁の特殊な場合として、梁の中央の格子点 x_4 に横荷重 P_4 だけが作用する場合について w_4 の応答を w_{44} と表記することにします。この時、横荷重 P_4 と応答を w_{44} は次の様に表すことができます。

$$K_4 \times w_{44} = P_4 \quad (K_4 \text{ は比例定数})$$

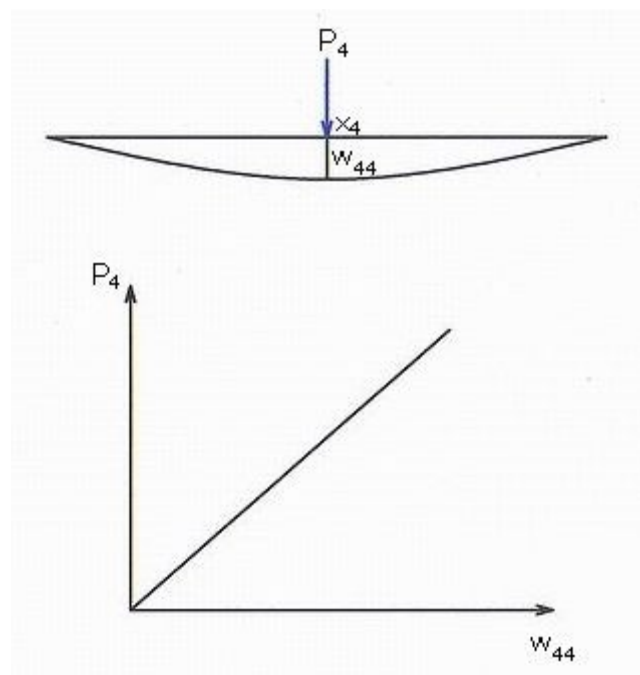


図7 線形弾性体の荷重とたわみの関係

図からわかるように、 P_4 と w_{44} の関係は直線として表すことができます。これが『線形』という意味です。

線形系の特徴を確認しておくことにします。まず、横荷重とたわみは一次式で表されますから、横荷重が倍の大きさになれば応答であるたわみも倍になります。一般的に、横荷重が a 倍になると、

$$K_4 \times (a \times w_{44}) = a \times P_4$$

と表すことができます。次に、 P_4 が幾つかの力の和で表せる場合、ここでは $P_4 = (P_4)_1 + (P_4)_2$ だとすると、

$$\begin{aligned} K_4 \times (w_{44})_1 &= (P_4)_1 \\ K_4 \times (w_{44})_2 &= (P_4)_2 \\ K_4 \times \{(w_{44})_1 + (w_{44})_2\} &= (P_4)_1 + (P_4)_2 \\ \therefore w_{44} &= (w_{44})_1 + (w_{44})_2 \end{aligned}$$

つまり、複数の横荷重についての応答は、それぞれの横荷重に対する応答の和として表すことが出来ます。

更にこれを拡張すると、格子点 x_3 に横荷重 P_3 が作用した時の格子点 x_4 のたわみを w_{43} とした時、横荷重 P_4 と P_3 が同時に作用した場合の格子点 x_4 の応答には、次の関係が成り立ちます。

$$w_4 = w_{44} + w_{43}$$

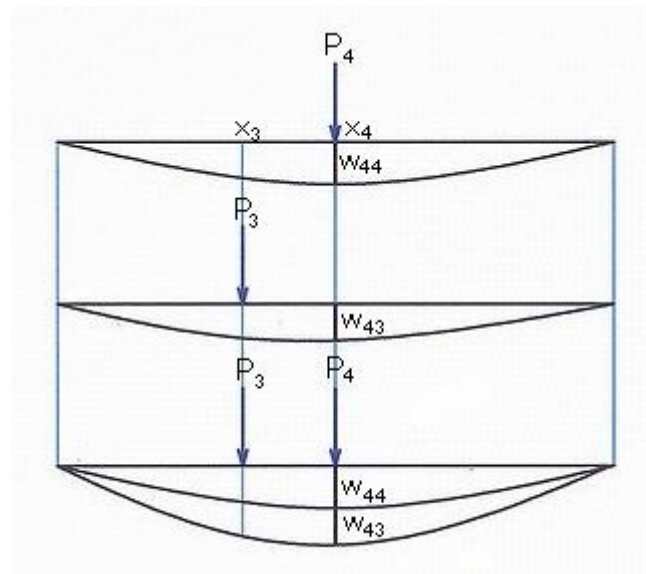


図8 線形弾性体における重ね合わせの原理

これは重ね合わせの原理と呼ばれるものです。線形系では、複数の入力に対して個別に応答を求め、これを足し合わせる＝重ね合わせることで全体の応答が求められるのです。

もし仮に、対象とする自然現象が線形系だとすると、現象を分析的に部分に分割して、その詳細が分かれば、部分を機械的に重ね合わせることによって自然現象全体を説明することができることになります。

5. 非線形系

5-1 材料非線形

これまで例題としてきた単純梁の問題は、『線形弾性・微小変形』の問題として扱ってきました。具体的には曲げモーメント M がたわみの w についての二階微分で表される曲げ歪 w'' に比例し、その比例定数 IE が定数であるとしてきました。

まず、材料非線形について考えます。これは、梁を作っている物質の持つ弾性係数 E に関する非線形性に由来します。『弾性』とは、力を加えると変形し、力を除くと元の状態に戻る性質です。加えた力に対する変形のしやすさを示すのが弾性係数です。

線形弾性体では弾性係数は定数で変化しないものとして扱います。図9上の図は、曲げを受ける梁のモーメント M と曲げ歪 w'' の関係を示しています。線形弾性体について、直線の勾配が曲げ剛性 IE を表しています。

非線形弾性体では、曲げ剛性 IE が曲げ歪 w'' の関数 $IE(w'')$ になります。

線形弾性体、非線形弾性体は、荷重が増加していく経路（青色の矢印）と荷重が減少していく経路（桃色の矢印）は同じであり、荷重がゼロになると、変形（歪）もゼロに戻ります。

これに対して、非線形弾塑性体では、荷重が増加していく経路と減少していく経路が異なり、荷重がゼロになっても『残留歪』が残り、完全に元の状態にもどることはありません。非線形弾塑性体の歪-荷重曲線はいわゆる履歴曲線（ヒステリシスカーブ）の典型的な例の一つです。

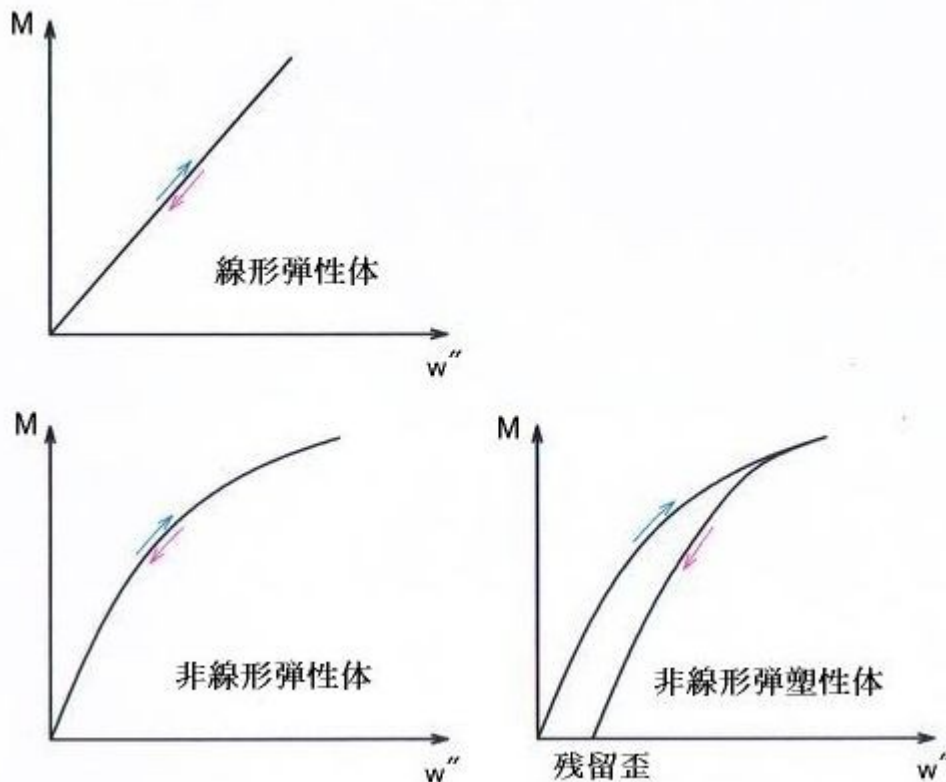


図9 材料特性による応力-歪曲線の変化

弾性係数については、もう一つの重要な性質があります。それは弾性係数の時間依存性に起因する性質です。ある物体に対して一定の力を加えておくと、時間の経過に伴って、変形が更に進行していくことがあります。これは弾性係数 E が時間 t の関数 $E(t)$ であることを示しています。このような性質を『粘弾性』と呼びます。

以上から、材料非線形を一般的に表せば、曲げ剛性については $IE = IE(w'', t)$ と表すことができます。

ここでは梁の曲げ問題についての材料特性の問題として考えましたが、これは自然現象一般について、対象とする現象の支配方程式そのものではなく、その中に現われる現象の起こる場＝環境の状態量の非線形性と対応させて考えればよいでしょう。

5-2 幾何学的非線形

幾何学的非線形性は前節で示した弾性係数と言う状態量の持つ非線形性ではなく、支配方程式自体の持つ非線形性に由来します。『微小変形』問題とは、変形量が小さく、変形量の2次以上の因数を含む項を無視しても大きな影響がない場合に成立します。

これに対して『大変形問題』では、変形量の2次以上の因数を含む項の影響が無視し得ない場合です。構造力学では求めようとする変形量＝幾何学量の非線形性に由来することから『幾何学的非線形』と呼んでいます。

単純梁の問題においても、たわみ w が大きくなれば支配方程式は w の非線形項を含んだ形に修正されることとなります。幾何学的非線形性を含む支配方程式は複雑になるのでここでは触れないことにします。そのかわりにいくつかの面白い非線形現象を紹介する事にします。

(1) 座屈

次頁の図 10 に示すように、一端（左端）を自由に回転できるピンで壁に固定した棒のもう一方の端点に、棒の方向に力 P を加えることにします。力が小さいうちは棒が軸方向に少し縮みます（もちろん目で見えるほどには縮みません。これが微小変形ということです）。ところが力の大きさがある大きさを超えると、突然力を加えている方向とは直角の方向に棒が大きくたわみます。

この現象について、力 P と棒の中央点の力の作用方向に直交する方向へのたわみ w の関係を図 10 のグラフに示します。力を大きくしていく（青色の矢印）と、ある力まではたわみはゼロです。ところが力がある大きさを超えると突然たわみ始めます。この現象を座屈と呼び、たわみ始める力を座屈荷重と呼びます。

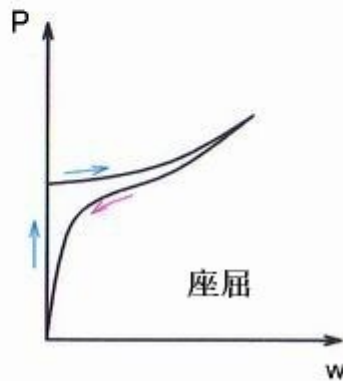
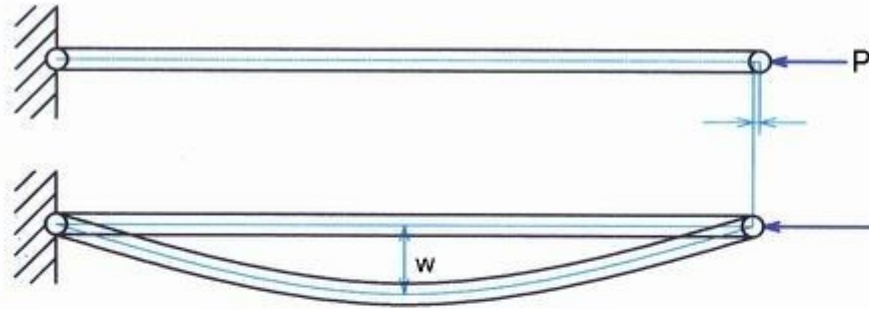


図 10 軸方向に圧縮を受ける棒の座屈

(2) 飛移

前の例で、座屈した状態を固定した状態を初期状態とします。これは、棒の長さよりも少し幅の狭い壁の間に棒を無理に押し込んだような状態です。この曲がった状態の棒の中央に横荷重 P を作用させることにします。図の桃色の線は、横荷重 $P=0$ の状態とします。

横荷重 P が小さいうちは、上方向に反ったまま徐々に下方向に変移しますが、ある値を超えると棒は突然下方向に反った状態に移行します。

横荷重 P の大きさと P の作用した点のたわみをグラフに示します。荷重を増加させていく（青色の矢印）とたわみは $a \rightarrow b$ に移動し、更に横荷重 P が増加して極大値を越えると、突然 c へ移動します。この現象を『飛移』現象と呼びます。

c の状態から荷重を減少させてゼロに戻すと、 d 点に移動します。 d 点から更に上方向に横荷重 P を増加させると、桃色の矢印に従って再び飛移現象が起こって棒は上方向に反ることになります。

グラフの極大値と極小値の間の部分は、不安定領域であり横荷重 P を制御するような実験では再現できない領域です。

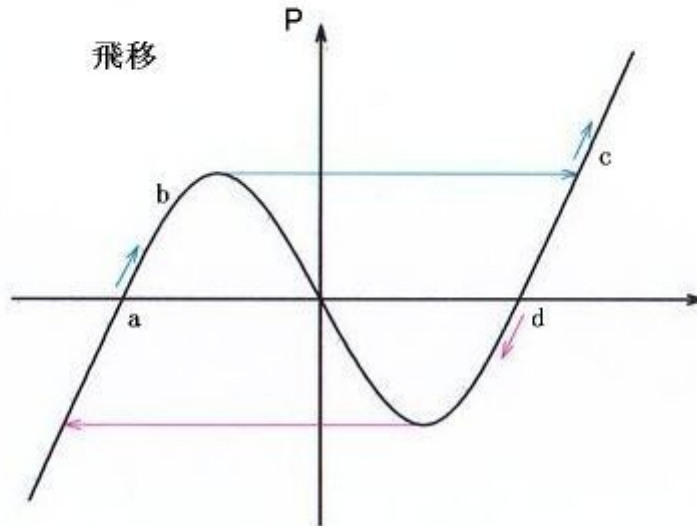
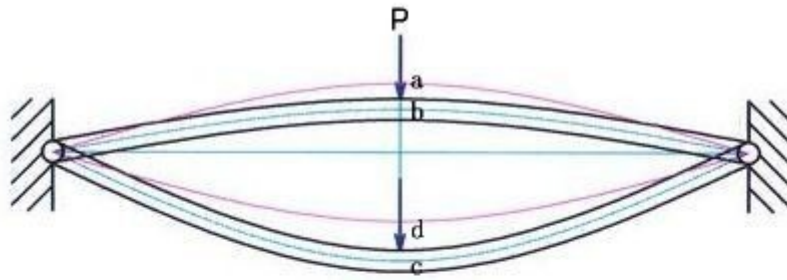


図 11 横荷重を受ける梁の飛移現象

以上、簡単な構造力学の問題について材料非線形と幾何学的非線形現象を紹介してきましたが、一般的には自然現象の支配方程式(勿論、現象が十分理解されていることが前提です。)の非線形性と、その支配方程式に含まれている状態量の非線形性が相互に関連した非線形現象として現われることとなります。時間依存性を含めた、非線形・非定常問題は形式的に次のように書き表すことができます。

$$\{[K]+[K(w)]+[K(t)]\}w = P$$

- [K]** 定数係数行列
- [K(w)]** 応答 **w** の関数を要素とする係数行列
- [K(t)]** 時間 **t** の関数を要素とする係数行列
- w** 格子点における応答ベクトル
- P** 格子点における入力ベクトル

5-3 非線形連立方程式の解法

非線形系の数値的な離散化までの流れを見てきました。例として構造力学の問題を扱ってきたわけですが、ここからは一般論として整理しなおすことにします。まず、記号を整理しておきます。非線形連立方程式を次のように表記します。太字はベクトル量、 $[\]$ は行列を表すものとします。

$$[\mathbf{K}(\Psi(\Phi(t), t), \Phi(t))] \Phi(t) = \mathbf{Q}(\Phi(t), t)$$

$[\mathbf{K}(\Psi(\Phi(t), t), \Phi(t))]$	係数行列
$\Psi(\Phi(t), t)$	状態量
$\Phi(t)$	応答ベクトル
$\mathbf{Q}(\Phi(t), t)$	入力ベクトル
t	時間

係数行列の要素は状態量 $\Psi(\Phi(t), t)$ と、応答 $\Phi(t)$ の関数として現われますから、高次の非線形性を持っています。状態量 $\Psi(\Phi(t), t)$ は応答 $\Phi(t)$ と時間 t の関数になります。自動的に時間追跡を行うことを前提にすると、入力 $\mathbf{Q}(\Phi(t), t)$ も応答 $\Phi(t)$ と時間 t の関数になります。

とりあえずこれで、非線形・非定常問題に対する非線形連立方程式が完成しましたので、後はこれをどうやって解くかということになります。この件について、もうだいぶ前になりますが、国立環境研究所の江守正多氏は私の問いに次のように回答してくれました。

— 気候モデルでは、非線形方程式を非線形のまま離散化して解いています。大気モデルでは、普通収束計算は行いません。海洋モデルでは収束計算を行うものもありますが、それほど数値的に難しいものではありません。全般的に言って、数値計算の技術的な問題が無いわけではないですが、モデルの難しさの源としては、パラメタ化の難しさの方がずっと大きな割合を占める、というのが私の認識です。

残念ながら、非線形の連立方程式を非線形のまま解くということはできません。何らかの仮定の下に非線形項を取り除き、応答ベクトルに対する線形化を行わなければなりません。一般的には、応答が既知の時点 t_0 における値を使って、時間 t における応答 $\Phi(t)$ について『線形』の関数関係を次のように構成します。

$$[\mathbf{K}(\Psi(\Phi_0(t_0), t_0), \Phi_0(t_0))] \Phi(t) = \mathbf{Q}(\Phi_0(t_0), t)$$

$[\mathbf{K}(\Psi(\Phi_0(t_0), t_0), \Phi_0(t_0))] = [\mathbf{K}(t_0)]$ 、 $\mathbf{Q}(\Phi_0(t_0), t) = \mathbf{Q}(t)$ と表すと、

$$[\mathbf{K}(t_0)]\Phi(t) = \Omega(t)$$

この線形化した連立一次方程式に大きな入力 $\Omega(t)$ を与えると、大きな誤差が生じます。そこで、時間 t を短いステップ Δt に分割して、ステップごとに $[\mathbf{K}(t_0)]$ を修正してやることにします。これに対応して、入力は $\Delta\Omega(t)$ 、それに対する応答は $\Delta\Phi(t)$ として求めます。

$$[\mathbf{K}(t_0)]\Delta\Phi(t) = \Delta\Omega(t)$$

最終的な解は $\Phi(t) = \sum \Delta\Phi(t)$ になります。これを『増分法』と呼びます。増分法による近似解を求める過程を模式的に表したのが図 12 の上の図です。黒の実線が正解を示し、緑色の折れ線が増分法による近似解を示します。図 12 からわかるように、残念ながら増分法では繰り返し回数が増えるにしたがって誤差が蓄積するため、増分ステップの多くなる問題への単独での適用は余り現実的とはいえません。

この増分法の弱点を補うために、各時間ステップごとに収束計算を行うことで解の誤差を縮小するのが一般的です。下の図は増分法に非線形方程式の解法としてよく知られている Newton-Laphson 法を用いた『接線係数法』による収束計算を併用した場合の模式図を示します。赤色で示したノコギリ状の折れ線が収束計算の過程を示しています。

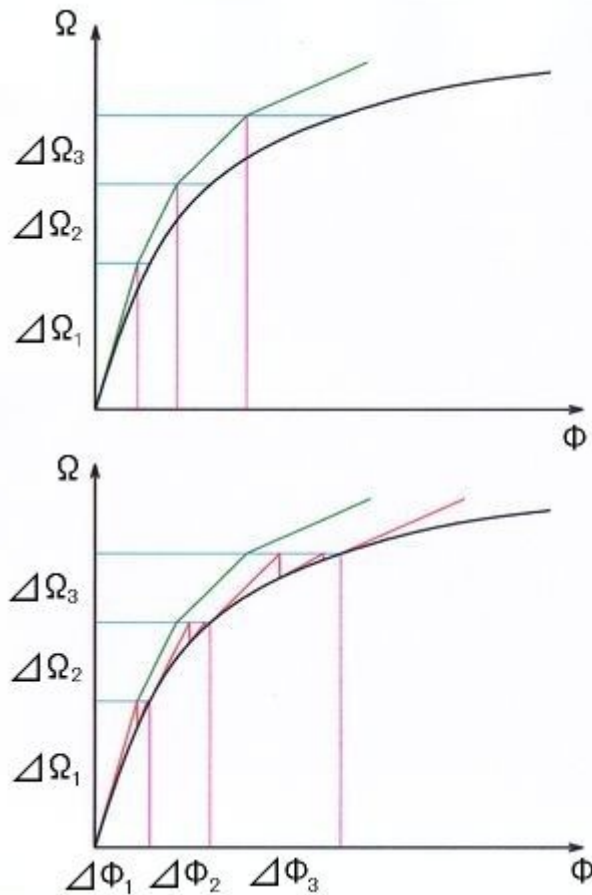


図 12 増分法と接線係数法による解の改良

非線形の構造計算では、求める応答である変形量がそれほど時空的に激しく変動することはありませんが、それでも意味のある解を求める場合には、増分法に収束計算を併用するのが一般的です。

気候予測では、大気という比熱が小さく簡単に変形・圧縮される物質を対象とするため、入力の変化に対して極めて敏感に反応すると考えられます。気象要素が時空的に激しく変動する問題に対して、収束計算を行わずに、意味のある解が得られるとは考えられません。

しかし、一方では収束計算はいつでもうまく行く保証はなく、激しく変動する関数に対しては解が発散する可能性が高くなります。気候予測で収束計算を行わない理由は、解の精度はともかく、解の発散を避けて、とりあえず有限確定値をまがりなりにも求めようとした結果なのかもしれません。

このような激しく変動する応答を求める問題において、精度的にも意味のある解を求めるためには、空間的な格子間隔や時間間隔を区間内で応答 Φ が十分滑らかな関数と見なせるほどに限りなく細分化することが必要になります。

しかし、ここでまた別の問題が起こります。パラメータ数の増加、数値モデルの高精度化は、計算機のハード的な有効数字の限界による数値誤差の絶対値と解の絶対値の相対的な比を縮小し、S/N 比が悪くなり、解が不安定化する可能性が高くなるのです。

また、より現実的な問題として、利用可能な計算機という資源の限界が存在します。

以上、非線形連立方程式の求解に関する技術的な問題点をいくつか見てきましたが、最後にもう少し非線形連立方程式の解の問題を見ておくことにします。

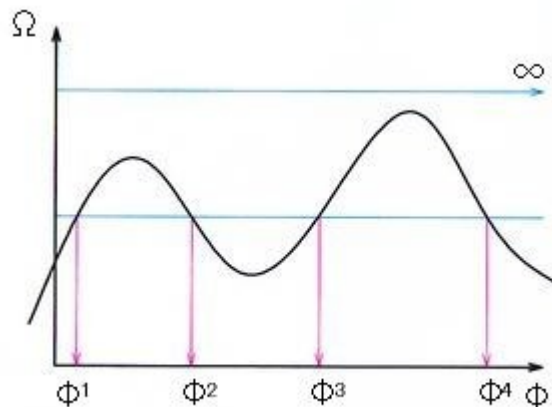


図 13 非線形系では解の一意性は保証されない

線形系であれば応答は一次関数としてあらわすことが出来ます。定義域を $(-\infty, \infty)$ とすれば、応答も $(-\infty, \infty)$ になりますから、有限の入力 Ω に対して、有限の解 Φ がただ一つ存在することになります。これが解の一意性と呼ばれるものです。

非線形系では、一般に入力 Ω に対して解の一意性は保証されていません。横荷重を受ける梁の飛移現象でも紹介したように、あるレベルの入力 Ω に対して、解が複数存在する可能

性があります。どの解に到達するのは、初期値の取り方によって色々な場合が考えられます。これは全ての格子点パラメータに言えることであり、結果として可能な応答ベクトル Φ の組み合わせは無数に存在することになります。これが『非線形系はカオスである』ということの実体的な意味です。また、入力 Ω のとり方によっては、対応する応答 Φ が存在せず、 ∞ に発散する可能性もあります。

6. 気候予測シミュレーションは不可能

6-1 明日の天気は予測できなくても気候シミュレーションは可能？

気候シミュレーションについて、気象現象の日単位の予測はできなくても、気象現象の長期的・平均的な振る舞いである気候については予測可能だという主張があります。この主張をもっともらしいと思う方もいるかも知れませんが、何の理論的な裏付けの無い戯言に過ぎません。もしこれを主張するならば、それを理論的・定量的に証明しなければなりません。

これまでの議論で、気象観測と気候シミュレーションの解像度の問題は似た問題だと思っている方もいると思います。しかし実際には決定的な違いがあります。

気象現象の観測値は、いくら時間的・空間的な密度が粗い情報であったとしても、それは現実には起こっている現象の部分的な情報を反映している、いわば気象現象という問題の正解の一部を切り出したものなのです。

ところが、数値シミュレーションの解像度の変化は数値シミュレーションの解そのものを変化させるものです。粗い格子間隔ないし時間間隔は、単に空間的・時間的に大きなスパンの平均的な解を与えるわけではなく、現実とはまったく異なった解になるのです。

気象現象も気候現象も同じ手法でモデル化されているのであれば、高解像度の気象シミュレーション＝短期の天気予報が予測不可能であっても、それよりも低解像度の気候シミュレーションによる長期的な予測が正解を与える事はあり得ません。また、日々の気象の変容を問題にしないのであれば、気候シミュレーションを時間追跡で行う意味など存在しないのです。

時間追跡で将来予測を試みる背景は、時間の経過に伴う不可逆的な気候システムの変容を反映するために外なりません。気候の長期的な将来予測を高い精度で求めるのであれば、まずその前提となるのは短期的な日々の気象変化を適切に予測し、それをモデルにフィードバックできることが必須条件です。

長期的な予測に意味を持たせるためには日々の気象予測に対する誤差の蓄積を出来る限り少なくしなければならないのです。気候予測用の数値モデルに解像度の低いモデルを使えば誤差が誤差をキャンセルして正解を導くなどと言う都合の良い結果は現実にはあり得ないのです。

6-2 気候シミュレーションに将来予測は不可能

気候シミュレーションの基本になるのは、流体粒子の運動量の保存則、質量の保存則、エネルギーの保存則です。この3つの基本法則を満足するような大気運動の構成法則を数値化することになります。ここでは、構成法則の詳細に立ち入ることはしません。

気象予測シミュレーションは、それ以前の数値シミュレーションに比較して幾つかの決定的な違いがあります。

まず一つは、対象とする領域が著しく巨大になったことです。これまでの数値シミュレーションは、実験環境を模倣するための道具として使われてきました。電子計算機の能力的な進歩に合わせて、対象とする問題は徐々に巨大化あるいは精緻化してきましたが、それでも、気候シミュレーション以前では、限定的な時空間のモデル化でした。

微視的な現象から巨視的な現象に及ぶ多くの階層性を含む巨大な時空間的な広がりを持つ問題の数値シミュレーションは、それだけでほとんど正解を得ることが出来ない致命的な欠陥を持っています。

現在、大気と海洋の結合モデルでは、海洋の深部から大気上層までを丸ごと解析の対象領域にしようとしています。気候モデルを構成する運動量の保存則、質量の保存則、エネルギーの保存則に関連する環境の状態量、例えば密度、温度、粘性、分子組成などは、無機的条件ばかりでなく生物的条件によって場所ごとに実に多様に変化すると考えられます。

高度な非線形系である気候システムの数値モデルを時間追跡で始動させるためには、これらの状態量に対してすべての領域において正しい初期値を設定してやる必要があります。しかし、私たちはある瞬間において同時に、海の底から大気上層までのあらゆる場所の状態量 $\Psi(\Phi_0(t_0), t_0)$ を観測し得ないのです。つまり、数値モデルに対して与えるべき初期条件を適切に設定するだけの観測データを持っていないのです。

非線形問題では、解の一意性の保証がないため『可能な解』の組み合わせはほとんど無数に存在しています。数値モデルに対して不適切な初期値を設定すれば、無数の可能な解の中から唯一の正解にたどり着くことなど最初の段階で既に破綻しているのです。シミュレーションのための条件設定すらまともにできずに、一体何を計算しようと言うのでしょうか？

次に、気候シミュレーションでは、初期値に何らかの値を設定してやった後は、時間経過による変化を計算して、これを次の時間ステップにおける入力として利用することになります。通常の数値計算では外部から設定してやる入力を、前の時間ステップの計算結果の応答から自動生成することになるのです。

しかし、気候現象に重大な影響を及ぼす可能性のある全ての現象をプログラムに内部化することは不可能です。例えば太陽活動の活性度、宇宙線量の変化、固体地球の大規模火山活動、エルニーニョ・ラニーニャなどの現象の発生を的確に予測することは不可能なのです。また、気候現象と生物的環境の相互作用による変化を普遍的に予測することも不可能です。

つまり、もし仮に気候を表現できる数値モデルができたとしても、気候に大きな影響を

与える自然現象の発生を正確に予測できない以上、入力 $\Omega(\Phi(t), t)$ に適切な値を設定することができないため時間追跡による気候の将来予測は不可能なのです。

更に、現在の気候予測シミュレーションでは『パラメタ化』という手法が使われています。これは、現象的に把握されていない問題に対して、現象の発現機構は無視して経験的な入力に対する応答をブラックボックスとして数値モデルに組み込もうという試みです。代表的なものは、真鍋による大気鉛直温度構造の放射対流平衡モデルによるシミュレーションで使われた『対流調整』があります。

この手法は、現象の物理的な発現機構を無視してとりあえず数値的に値を求めろごまかしであり、環境の変化による現象の変容を示せないため、普遍的な正しさは保証されないのです。

6-3 モデルの支配方程式と解像度の不整合

気象現象の観測値は非常に激しく変動することが知られています。その主要な原因の一つが、大気や海流の運動が乱流構造を持っていることが挙げられます（乱流とは、主流の流れの方向と直交する方向に非定常に変化する速度成分を持つ流れです。色々の大きさの渦が全体として流れている状態だと考えればよいでしょう。）。気象予測あるいは気候予測シミュレーションでは流体の運動を Navier-Stokes の運動方程式を使って表しています。

Navier-Stokes の運動方程式は、粘性流体の微小部分について流体運動の連続性を前提に微分形式で表された方程式です。粘性流体の微小部分、これは流体粒子と呼ばれますが、そのスケールは、『ナビエ-ストークス方程式で表現された流体粒子は、流体粒子の密度が定義できるほど充分大きく、しかしニュートン力学が扱ってた質点の仮定が満たされるほど小さいと見なすのである（気候シミュレーションとは何か／中本）』とされています。

気候シミュレーション以前では、Navier-Stokes の運動方程式を用いる流体の解析は、ユークリッド幾何学の成立する限られた空間的広がりの流れに対して適用されてきました。こうした問題に対してはある程度意味のある『定性的』な結果を得ています。

しかし、気候シミュレーションでは地球全体という広大な領域を対象にしているわけですが、ここでは球面上に重力によって拘束された流体の局所回転座標系における運動を対象としなければなりません。局所回転座標系＝地球に固定された加速度座標系で運動を記述するためには、コリオリの力に代表される慣性力という『架空の力』を必要とします。

第一の問題は、Navier-Stokes の運動方程式を用いる流体の解析が局所的な空間で成果を得たからといって、これを局所回転座標系の特性を無視し得ない地球規模の流体運動に適用することが妥当である保証が無いことです。

気候現象という熱現象を含む流体運動の解析に当たっては、乱流の持つ特性、例えば乱流拡散現象や、流体の運動エネルギーの熱エネルギーへの転化と環境への散逸が重要です。これを記述するためには、乱流を適切に表現することが必要です。

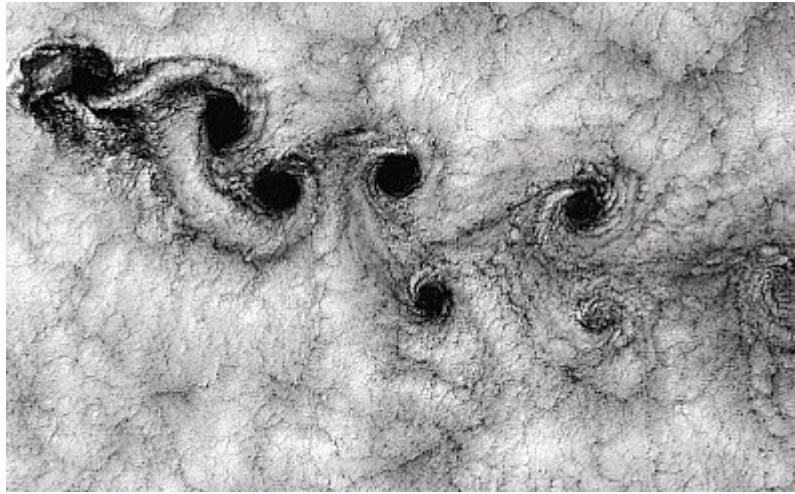


図 14 屋久島宮之浦岳の後流に現われた周期的なカルマン渦

自然風つまり大気の流れ運動では、様々のスケールの渦が混在しています。大きな渦としては、衛星写真で判読できるような熱帯性低気圧の数 10km~100km サイズの巨大な渦、海洋上の孤立した島の後流に見られるカルマン渦（図 14）、小さい方では物体の表面境界層に見られるサブ mm サイズの微小な渦まで存在します。運動エネルギーの熱エネルギーへの転化・散逸について解析するためにはサブ mm サイズの渦の挙動が重要だと言われます。

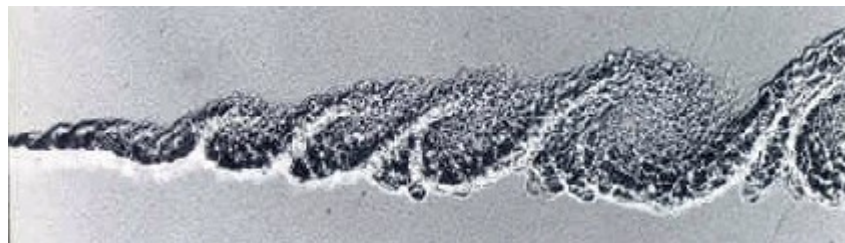


図 15 Roshko(1976)自由乱流境界層の発達

左方から空気を流し、上方側の流速が下方側よりも大きいため、流速のギャップを緩和するために乱流境界層が形成されている。写真の場合、乱流境界層は階層性を持つ右回りの渦によって構成されている。一般に、速度勾配を持つ粘性流体の流れ場では渦を生じる。流れの中に物体を置くと物体表面では流速が 0 となるので『表面境界層』が発達する。発達した表面境界層が物体から剥がれ、後流に左右逆回転の渦が周期的に見られる現象がカルマン渦である。

Navier-Stokes の運動方程式で大気の流れ運動を表現するためには流体粒子のサイズを、対象とする流れを滑らかな流れと見なせるほどに小さくする必要があります。

つまり、直接的に熱現象を含めて大気の流れ運動を表現しようとした場合、大気をモデル化した数値シミュレーション・モデルの格子間隔は少なくともサブ mm サイズでなければならないのです。

現在の気候大循環モデルの水平解像度＝格子間隔は数 km～数 100km ですから、少なくとも格子間隔を現在の 10^{-6} ～ 10^{-8} 倍にしなければならないのです。空間的な格子点数は現在

のモデルの格子点数の $10^{18} \sim 10^{24}$ 倍に膨れ上がるということです。また時間追跡の時間間隔も意味のあるものに短くしてやらなければなりません。

現実的にはこのような巨大な数値モデルを実行することは二つの点から不可能です。一つは、電子計算機の能力的な限界です。次に、仮にそれがクリアーできたとしても、数値誤差の蓄積で解の S/N 比が極端に悪化する可能性が高く、意味のある解を安定的に求めることは出来なんでしょう。以上から、気象ないし気候現象を Navier-Stokes の運動方程式に基礎を置く数値シミュレーションによって物理現象を解析的に追跡して定量的に意味のある将来予測を行うという手法は不可能と考えるべきなのです。

■補足 適切な格子間隔と時間間隔の設定

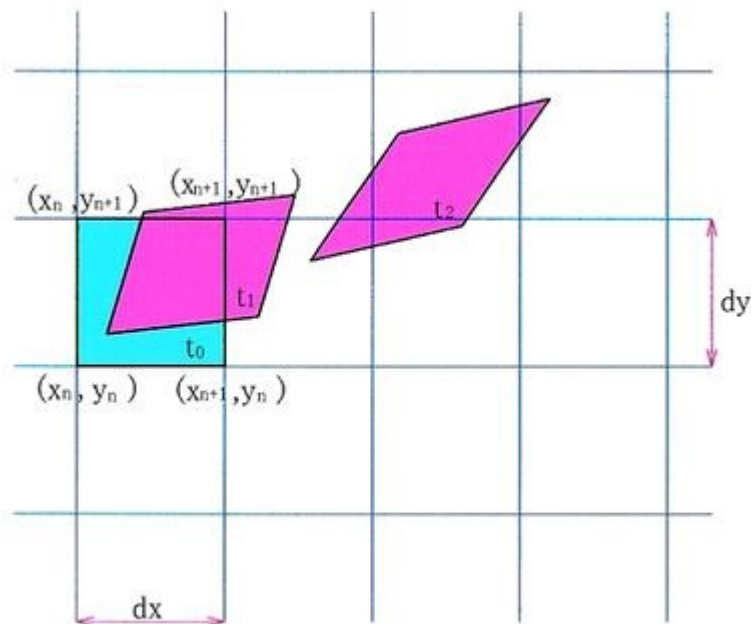


図 16 二次元粘性流体の移動と変形

時刻 t_0 における格子点 $(x_n, y_n) \sim (x_{n+1}, y_{n+1})$ で示された水色の領域が一つの「流体粒子」を表すものとします。流体粒子は主流の方向に移動するだけでなく、回転運動と同時に剪断変形（ひし形にずれるような変形）しながら $t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow t_2$ と移動します。

格子間隔 dx 、 dy は、数値モデルで表現しようとする現象、粘性流体の乱流運動では表現しようとする最小の渦のスケールよりも十分小さい必要があります。運動エネルギーの熱エネルギーへの転化と環境への散逸を対象とする場合にはサブ mm サイズにするのが理想的だと言われます。ここでは dx 、 dy を 1.0mm とすれば、cm サイズ程度の渦を表現することが期待出来ます。

乱流は、その流れの中に非定常に生成・消滅を繰り返す各種スケールの渦を含みながら、全体として主流の方向に流れています。このような激しい非定常運動を追跡するためには十分短い時間間隔で現象を追跡しなくてはなりません。

理想的には、時間間隔を $dt = (t_1 - t_0)$ 程度にとり、流体粒子が完全に領域 $(x_n, y_n) \sim (x_{n+1}, y_{n+1})$

を抜けきらない程度にすることが望ましいと考えられます。時間間隔を大きくするにしたがって、数値モデルの流れは滑らかな流れとなり、乱流構造をうまく表現できなくなります。

主流の流速を v とすれば、理想的な時間間隔は $dt < dx/v$ 程度だと考えられます。仮に、 $v = 1.0\text{m/秒}$ (風速 1.0m) = 1000mm/秒 のとき、 $dt < 1/1000 = 0.001$ 秒、 $v = 10.0\text{m/秒}$ であれば $dt < 0.0001$ 秒程度が望ましいのです。このように、同じ格子間隔を流れる流体の運動でも、流速が早ければ時間間隔を短くしてやらなければ誤差が大きくなるのです。

大気の流れのように激しく変動する非定常流では、対象とすべき物理現象の最小スケールを基に格子間隔を設定し、考えうる最大流速に対して時間間隔を設定しなければなりません。

現状の気候予測用数値モデルの水平面内の格子間隔は数 km ~ 数 100km というものであり、とても大気の流れ構造を議論できるような解像度ではありません。これでは熱帯性低気圧の表現も危ういのが現状です。

粘性流体の運動を表現するために Navier-Stokes の運動方程式を離散化した数値モデルを用いれば、自動的に大気の流れ構造が再現できるわけではないのです。一体どのような物理現象を再現することが目的であるのか、そのためにはどの程度の空間的な解像度が必要で、その中でどの程度の時間間隔でモデルを動かせばよいのかを考慮したうえで綿密に数値モデルを設計・運用しなければ有効な解は得られないのです。

これまで、Navier-Stokes の運動方程式を直接的に用いて乱流構造を持つ大気をモデル化する数値シミュレーションについては不可能だということを述べました。それならば、微小流体粒子ではなく、もう少し大きな大域的な大気を対象として乱流運動を記述できないかという疑問が生じます。

そのためには、乱流の微小構造を十分把握してこれをパラメタ化するということとなります。これは一つの方向であろうと思います。こうした方向で、乱流の特性を明らかにしようという研究は行われていますが、未だ風洞によるモデル実験と数値的なシミュレーション結果を比較照合する段階であり、必ずしも定量化できる段階ではないようです。自然風の影響を考慮する必要がある工学的な問題、例えば長大橋梁や塔状構造物についての設計の最終段階では現在でも高価な風洞実験が用いられることが多いことから、この程度の空間的なサイズでも数値的なシミュレーションの信頼性は高くないと考えられます。

結局、実験的な環境においても色々なスケールの渦を色々な比率で含む乱流の特性を十分には把握できていないのが現状なのです。しかし、仮に乱流の性状に対しての特性が十分定量的に把握できたとしても、乱流の物理的なモデル化を排除した気候モデルでは、乱れの性状が不明なので、適用すべき乱流の特性を適切に指定できないという矛盾が生じることとなります。ここでもパラメタ化一般の弱点が排除できず、結局意味のある気候シミュレーションは出来ないということなのです。

6-4 モデルの誤差評価ができない問題

さて、気候シミュレーションに携わる計算機気象学者は、気候シミュレーション・モデルは過去の気候を再現することに成功しているのだから正しいのだと言い、多くの人たちもこれを『宗教的』に信頼しているようです。しかし、過去の気候を再現するということはどういうことなのでしょうか？

気候モデルは海の底から大気上層までの数 10 万～数 100 万 (?) の格子点パラメータを求めています。これに対して、『過去の』気象観測では、おそらく地表付近のしかも地域的に限定された場所のデータしか存在しません。一体何を以って再現できたと判断するのでしょうか？

この状況は現在でも同じです。現在においてもある瞬間の同一時間における深海から大気上層に亘る気象システムの状態に関する観測データなどどこにも存在しないのです。結局、気象ないし気候システムを模倣する数値シミュレーション・モデルを構築して何らかの計算結果を得たとしても、比較すべき実測データが存在しないのですから、シミュレーションの信頼性あるいは誤差評価ができないのです。誤差を評価できない数値モデルなど、単なるコンピューターゲームに過ぎないのです。

近年の電子計算機能力の進歩は急速に進んでいます。また、計算機気象学者は気象ないし気候予測モデルの改良を進めていますが、どのような結果が出ようと、本質的に誤差評価を行うことは不可能なのですから、モデルが改良されたかどうかなど評価のしようがなく、彼等の自己満足に過ぎないのです。

本質的なモデルの改善がないのは、日々の天気予報の精度がほとんど改善を見ていないことから明白です。

7. 結論

今回のレポートでは、気候予測の数値モデルの物理現象のモデル化の妥当性については敢えて触れず、主にモデルの解像度と数値計算技術と言う視点から議論を行ってきました。数値シミュレーションが意味を持つ問題とは、少なくとも対象とする問題をどのような条件下で求めるかが明確な場合に限られるのです。

非線形問題では、可能な解の組み合わせは無数に存在します。その中から唯一の正解を特定するためには、数値計算における境界条件や初期条件を正しく設定することが必要条件なのです。モデルの境界条件や初期条件が不明な非線形問題では、いくら数値モデルを精緻化し、仮にそれが正しいとしても、得られた解に何の意味もないのです。

地球全体をモデル化した気象ないし気候シミュレーションでは、理論的には、少なくとも深海から大気上層にいたる空間において、数値モデルに関連する物理量の、ある瞬間の値をすべて把握できない限り正しい計算条件を設定できないため、正解を得ることは不可能なのです。

もしかすると計算機気象学者は、そんな厳密な話しではなくても『程々の条件設定をすれば意味のある解が得られる』と主張するかもしれません。しかし、程々の条件とはどの程度であり、その影響がどの程度であるのかを比較対照する観測データが存在しないのですから、信頼性や誤差評価はできないのです。『程々の条件設定をすれば意味のある解が得られる』ことは証明不能なのです。

全体の計算条件が不明な問題では、時間追跡という形で将来予測を行うことは不可能なのです。もし数値モデル計算に意味があるとすれば、計算条件を幾つか設定して、条件の違いで計算結果がどう変わるのかという相対的な比較だけなのです。しかしそれが実際の気候とどう関係付けられるのかはまったく不明であり、単なる数遊びに過ぎず、気候シミュレーション＝気候現象の模倣ではないのです。

数値シミュレーションが有効であるのは、環境条件の設定がある程度厳密に行える実験室的な環境における限られた時空間で起こる現象の模倣だけなのです。未知の現象に対して数値シミュレーションを適用しようという試みは、適用範囲を逸脱した演繹主義の過ちなのです。これは科学の範疇を超えたコンピューターゲームに過ぎないのです。

(2008/07/03)